由勾股定理得 $OM^2+AM^2=OA^2$，

即 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}r\right)^2+\left(\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}r\right)^2=(\sqrt{10})^2$，

解得 $r=2$(负值已舍去)，

∴ ⊙O 的半径为 2.

12. (1)【**证明**】∵ CD 是⊙O 的直径，∴ $\angle CBD=90°$，∴ $\angle CBO+\angle OBD=90°$. ∵ $\angle ABD=\angle CBO$，∴ $\angle ABD+\angle OBD=90°$，即 $\angle ABO=90°$，∴ $OB\perp AB$. 又∵ OB 是⊙O 的半径，∴ AB 是⊙O 的切线.

(2)【**解**】∵ ⊙O 的半径为 1，∴ $OB=OC=OD=1$. 由(1)可知 $\angle ABO=90°$. ∵ D 为 AO 的中点，∴ $BD=OD=AD=1$，∴ $OB=OD=BD$，∴ $\triangle BOD$ 是等边三角形，∴ $\angle BOD=60°$，

∴ $\angle BOC=180°-\angle BOD=120°$，

∴ 劣弧 $\overset{\frown}{BC}$ 的长为 $\frac{120\pi\times1}{180}=\frac{2\pi}{3}$.

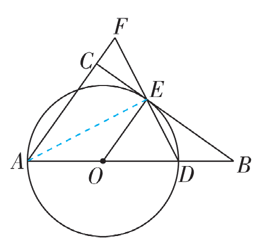
13. (1)【**证明**】∵ ⊙O 与 BC 相切于点 E，∴ $OE\perp BC$，

∴ $\angle BEO=90°$. ∵ $\angle ACB=90°$，

∴ $\angle ACB=\angle BEO$，∴ $AC/\!/OE$，∴ $\angle F=\angle OED$. ∵ $OE=OD$，

∴ $\angle OED=\angle ODE$，∴ $\angle F=\angle ODE$.

(2)【**解**】如图，连接 AE.



∵ AD 是直径，∴ $\angle AED=90°$，

∴ $\angle AEF=90°$. ∵ $\angle F=\angle ODE$，

∴ $\tan F=\tan\angle ODE=2$，$AF=AD$.

∵ $\angle ACB=90°$，∴ $\angle ECF=90°$.

在 Rt$\triangle CEF$ 中，$\tan F=\frac{CE}{CF}=2$.

∵ $CF=2$，∴ $CE=4$，∴ 由勾股定理得 $EF=\sqrt{CF^2+CE^2}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$. 在 Rt$\triangle AEF$ 中，∵ $\tan F=\frac{AE}{EF}=2$，∴ $AE=2EF=4\sqrt{5}$，

∴ 由勾股定理得 $AF=\sqrt{EF^2+AE^2}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2+(4\sqrt{5})^2}=10$，

∴ $AD=AF=10$，∴ ⊙O 的半径的长为 5.

14. (1)【**证明**】如图(1)，连接 OE，过点 O 作 $OG\perp AB$ 于点 G.

∵ ⊙O 与 AD 相切于点 E，∴ $OE\perp AD$.

∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，AC 是正方形的对角线，

∴ $\angle BAC=\angle DAC=45°$，∴ $OE=OG$.

∵ OE 为⊙O 的半径，

∴ OG 为⊙O 的半径.

∵ $OG\perp AB$，∴ AB 与⊙O 相切.

【**解**】(2)如图(1)，易得四边形 $AEOG$ 是正方形.

设 $AE=OE=OC=R$.

在 Rt$\triangle AEO$ 中，∵ $AE^2+EO^2=AO^2$，

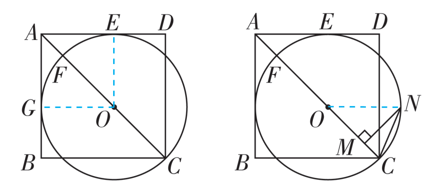
∴ $AO=\sqrt{2}R$.

∵ 正方形 $ABCD$ 的边长为 $\sqrt{2}+1$，

∴ 在 Rt$\triangle ADC$ 中，$AC=\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)$.

∵ $OA+OC=AC$，∴ $\sqrt{2}R+R=\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)$，

∴ $R=\sqrt{2}$，∴ ⊙O 的半径为 $\sqrt{2}$.



图(1) 图(2)

(3)如图(2)，连接 ON，设 $CM=k$.

∵ $CM:FM=1:4$，∴ $CF=5k$，∴ $OC=ON=2.5k$，∴ $OM=OC-CM=1.5k$.

在 Rt$\triangle OMN$ 中，由勾股定理得 $MN=2k$.

在 Rt$\triangle CMN$ 中，由勾股定理得 $CN=\sqrt{5}k$.

又由(2)得 $FC=5k=2\sqrt{2}$，∴ $k=\frac{2\sqrt{2}}{5}$，∴ $CN=\frac{2\sqrt{10}}{5}$.

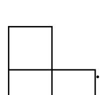
第七章 图形的变换

A 湖南真题诊断练

刷 诊断

1. C 【**解析**】A 选项，不是轴对称图形，故此选项不符合题意；B 选项，不是轴对称图形，故此选项不符合题意；C 选项，是轴对称图形，故此选项符合题意；D 选项，不是轴对称图形，故此选项不符合题意. 故选 C.

2. A 【**解析**】该纸杯的主视图是选项 A，故选 A.

3. A 【**解析**】该几何体的左视图是  故选 A.

4. D 【**解析**】将点 $P(3,5)$ 向上平移 2 个单位长度，则其横坐标不变，纵坐标增加 2，所以点 P' 的坐标为 $(3,7)$. 故选 D.

5. D 【**解析**】由折叠的性质可得 $AE=AB=4$，$DE=DB$，∴ $CE=AC-AE=6-4=2$，∴ $C_{\triangle CDE}=CE+CD+DE=CE+CD+DB=CE+CB=2+5=7$. 故选 D.

6. 3 【**解析**】由作图方法可得，MN 垂直平分 AB，∴ 点 D 为 AB 的中点. 又∵ 点 E 是 AC 的中点，∴ DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线，

∴ $DE=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\times6=3$，故答案为 3.

7.【**解**】(1)∵ $AB=AC$，$\angle B=72°$，∴ $\angle ACB=\angle B=72°$.

由作图可知，CD 是 $\angle ACB$ 的平分线，∴ $\angle BCD=\angle ACD=\frac{1}{2}\angle ACB=36°$.

(2) 由(1)可得$\angle ACD=\angle BCD=36°$.

在$\triangle BCD$中,由三角形内角和定理得$\angle BDC=180°-\angle B-\angle BCD=72°$,$\therefore \angle BDC=\angle B$,$\therefore CD=CB$. 在$\triangle ACD$中,$\because \angle BDC=\angle A+\angle ACD$,$\angle ACD=36°$,$\therefore \angle A=\angle BDC-\angle ACD=72°-36°=36°$,$\therefore \angle A=\angle ACD$,$\therefore AD=CD$,$\therefore AD=BC$. $\because BC=2.5$,$\therefore AD=2.5$.

8.【解】(1) 由作图过程可知,直线MN为线段AB的垂直平分线,

$\therefore$ 点D为AB的中点.

$\because \angle ACB=90°$,$\therefore CD=\dfrac{1}{2}AB=\sqrt{5}$.

(2) 在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中,由勾股定理得$BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-2^2}=4$.

$\because$ 直线MN为线段AB的垂直平分线,$\therefore EA=EB$,

$\therefore \triangle ACE$的周长为$AC+CE+EA=AC+CE+EB=AC+BC=2+4=6$.

9. (1)【证明】$\because$ 将$\triangle ABP$绕点A逆时针方向旋转$60°$,得到$\triangle ACQ$,

$\therefore PA=QA$,$\angle PAQ=60°$,

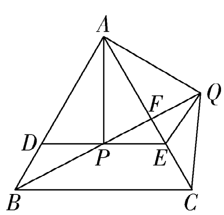
$\therefore \triangle APQ$是等边三角形,$\therefore \angle AQP=60°$.

$\because DE/\!/BC$,$\therefore \angle AED=\angle ACB=60°$,

$\therefore \angle AQP=\angle AED$,$\therefore A,P,E,Q$四点共圆,

$\therefore \angle PAQ+\angle PEQ=180°$,$\therefore \angle PEQ=120°$.

(2)【解】如图. 根据题意,只有当$\angle AFQ=90°$时,$\triangle AQF$是直角三角形.



由(1)得$\triangle APQ$是等边三角形,

$\therefore \angle APQ=60°$.

又$\because \angle AFQ=90°$,

$\therefore \angle PAF=30°$.

$\because \triangle ABC$是等边三角形,

$\therefore \angle ABC=\angle BCA=\angle CAB=60°$,$\therefore \angle DAP=30°$.

$\because DE/\!/BC$,$\therefore \angle ADP=\angle ABC=60°$,

$\therefore \angle APD=90°$,

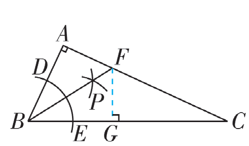
$\therefore \tan\angle ADP=\tan 60°=\dfrac{AP}{PD}=\sqrt{3}$.

B 考点突破练

考点31 尺规作图

刷基础

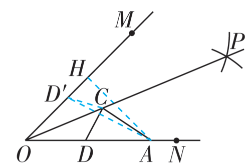
1. B 【解析】根据作图过程可知BF平分$\angle ABC$. 如图,过F作$FG\perp BC$于G. $\because$ 点F到BC的距离为4,



$\therefore FG=4$. $\because \angle A=90°$,$FG\perp BC$,BF平分$\angle ABC$,$\therefore AF=FG=4$. 故选B.

2. 10 【解析】由作图可知,EF是AB的垂直平分线,$\therefore AD=BD$,$\therefore \triangle BCD$的周长为$BD+DC+BC=AD+DC+BC=AC+BC$. $\because AC=6$,$BC=4$,$\therefore \triangle BCD$的周长为$6+4=10$. 故答案为10.

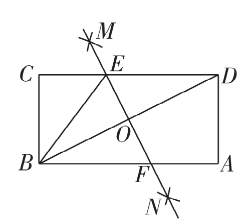
3. B 【解析】由作图可知,OP是$\angle MON$的平分线. 如图,作点D关于OP的对称点D',则D'在OM上,连接CD',AD',则$AC+CD=AC+CD'\geqslant AD'$,则当$A,C,D'$三点共线,且$AD'\perp OM$时,$AD'$最小,即$AC+CD$的值最小.



过点A作$AH\perp OM$于H,则$\angle AHO=90°$. $\because \angle AOH=45°$,$\therefore \triangle AHO$是等腰直角三角形,$\therefore AH=OA\cdot\sin 45°=2$,$\therefore AC+CD$的最小值为2. 故选B.

4. D 【解析】由作图可知,AP平分$\angle MAN$. $\because \angle MAN=60°$,$\therefore \angle MAP=\angle NAP=30°$,故①正确. $\because FG/\!/AM$,$\therefore \angle MAP=\angle GFA=30°$,$\therefore \angle GFA=\angle NAP=30°$,$\therefore AG=GF$,故②正确. $\because DF\perp AP$,$\therefore \angle AFE=\angle AFD=90°$. $\because \angle MAP=\angle NAP=30°$,$\therefore \angle AED=\angle ADE=60°=\angle EAD$,$\therefore \triangle ADE$是等边三角形,故③正确. $\because \triangle ADE$是等边三角形,$\therefore AE=AD$. $\because AF\perp DE$,$\therefore EF=DF$. $\because FG/\!/AM$,$\therefore \angle EGF=\angle MAN=60°$,$\angle EFG=\angle ADE=60°$,$\therefore \triangle EGF$是等边三角形,$\therefore EG=GF$. $\because AG=GF$,$\therefore AG=EG$,$\therefore GF$是$\triangle AED$的中位线,故④正确. 综上可知,①②③④均正确,故选D.

5. C 【解析】A选项,由作图知,MN垂直平分BD,$\therefore BE=DE$,故A正确,不符合题意. B选项,$\because$ 四边形$ABCD$是矩形,$\therefore AB/\!/CD$,$\therefore \angle ABD=\angle CDB$. $\because BE=DE$,$\therefore \angle EBD=\angle EDB$,$\therefore \angle ABD=\angle DBE$,故B正确,不符合题意. C选项,如图,设$MN$与$BD$交于点$O$. $\because \angle ABD=\angle DBE$,$\angle BOE=\angle BOF=90°$,$BO=BO$,$\therefore \triangle BOE\cong\triangle BOF$(ASA),$\therefore BF=BE=10$,$\therefore DE=10$. $\because CE=6$,



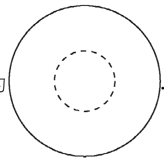
$\therefore BC=\sqrt{BE^2-CE^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$,

$\therefore BD=\sqrt{BC^2+CD^2}=\sqrt{8^2+(6+10)^2}=8\sqrt{5}$,$\therefore BC\neq\dfrac{1}{2}BD$,$\therefore \angle BDC\neq 30°$,$\therefore \angle ABD\neq 30°$,故C错误,符合题意. D选项,$\because$ 四边形$ABCD$为矩形,$\therefore AD=BC=8$,故D正确,不符合题意. 故选C.

6. $\dfrac{5}{2}$ 【解析】在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中,由勾股定理得,$BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=5$. 由作图可知,$AD=AB=12$,MN垂直平分AD,$\therefore AF=\dfrac{1}{2}AD=6$,$\angle AFE=\angle ABC=90°$. 又$\because \angle A=\angle A$,$\therefore \triangle AFE\backsim\triangle ABC$,$\therefore \dfrac{AF}{AB}=\dfrac{EF}{BC}$,$\therefore \dfrac{6}{12}=\dfrac{EF}{5}$,$\therefore EF=\dfrac{5}{2}$,故答案为$\dfrac{5}{2}$.

考点32　视图与投影

刷基础

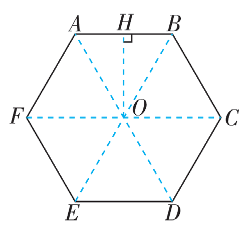
1. D　【解析】此碗的俯视图为. 故选 D.

2. B　【解析】∵ 位似图形由三角尺与其在灯光照射下的中心投影组成，且位似比为 2∶5，三角尺的面积为 4 cm^2，∴ 投影三角形的面积为 25 cm^2. 故选 B.

3. 137　【解析】由题意得，$\dfrac{EF}{FD}=\dfrac{OB}{OA}$，即 $\dfrac{\frac{3}{2}}{3}=\dfrac{OB}{274}$，∴ $OB=137$ 米. 故答案为 137.

4. A　【解析】由题图可知，该几何体的主视图、左视图、俯视图都是长方形，可得该几何体为四棱柱. 故选 A.

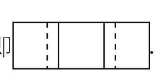
5. $(36+12\sqrt{3})$　【解析】由三视图得，该工件为正六棱柱. 如图，连接 AD，BE，CF 交于点 O，过点 O 作 $OH\perp AB$ 于 H，则点 O 为正六边形 $ABCDEF$ 的中心，易得 $\triangle AOB$ 是等边三角形，∴ $AH=\dfrac{1}{2}AB=1$，$OA=AB=2$，∴ $OH=\sqrt{OA^2-AH^2}=\sqrt{3}$，∴ $S_{正六边形ABCDEF}=S_{\triangle AOB}\times 6=\dfrac{1}{2}\times AB\times OH\times 6=\dfrac{1}{2}\times 2\times\sqrt{3}\times 6=6\sqrt{3}$. 正六棱柱的侧面积为 $2\times 3\times 6=36$，∴ 它的表面积为 $36+2\times 6\sqrt{3}=(36+12\sqrt{3})$ cm^2. 故答案为 $(36+12\sqrt{3})$.



6. C　【解析】由正方体的表面展开图，可知“冷”字与“沉”字相对，“细”字与“着”字相对，“仔”字与“静”字相对. 故选 C.

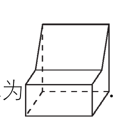
7. D

刷易错

8. D　【解析】从上面看，是一个矩形，矩形的中间有 2 条纵向的实线和 2 条纵向的虚线. 即. 故选 D.

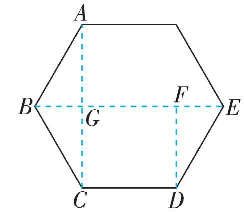
> **易错警示**
>
> **画三视图时线的虚实**
>
> 画三视图时，看得见的线画成实线，看不见的线画成虚线.

刷提升

1. C　【解析】根据三视图可知这个几何体为. 故选 C.

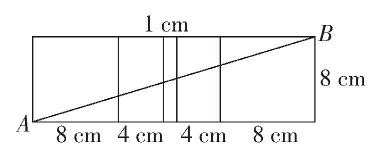
2. A　【解析】这个几何体的主视图与左视图相同，俯视图与主视图和左视图不相同，故选 A.

3. $(120\sqrt{3}+90)$　【解析】根据题意，作出实物图的上底面，如图，连接 BE，AC 交于点 G，过点 D 作 $DF\perp BE$ 于 F. 由题意可得 $BE=40$ cm. ∵ 正六边形每个内角为 $180°-\dfrac{360°}{6}=120°$，



∴ $\angle CBG=\dfrac{1}{2}\angle ABC=60°$. ∵ $BC=BA$，∴ $\angle BCA=\angle BAC=30°$，∴ $BE\perp AC$，$\angle ACD=90°$，∴ 四边形 $CGFD$ 为矩形，∴ $\angle CDF=90°$，∴ $\angle EDF=30°$. ∵ $\angle BCG=\angle EDF=30°$，$\angle BGC=\angle EFD=90°$，$BC=ED$，∴ $\triangle BGC\cong\triangle EFD$ (AAS)，∴ $BG=FE=\dfrac{1}{2}CD=\dfrac{1}{2}GF$，∴ $BG=\dfrac{40}{4}=10$ (cm)，$BC=CD=\dfrac{40}{2}=20$ (cm)，∴ $CG=\sqrt{BC^2-BG^2}=10\sqrt{3}$ cm，∴ $AC=2CG=20\sqrt{3}$ cm，故所需胶带长度至少为 $20\sqrt{3}\times 6+15\times 6=(120\sqrt{3}+90)$ cm. 故答案为 $(120\sqrt{3}+90)$.

4. $\sqrt{689}$ cm　【解析】如图所示是托盘的部分展开图，由勾股定理得，$AB=\sqrt{(8\times 2+4\times 2+1)^2+8^2}=\sqrt{25^2+8^2}=\sqrt{625+64}=\sqrt{689}$ (cm)，故蚂蚁爬行的最短距离为 $\sqrt{689}$ cm，故答案为 $\sqrt{689}$ cm.



5. 4　【解析】由题知该“堑堵”的高 $h=\dfrac{1}{2}\times 8=4$. 故答案为 4.

刷素养

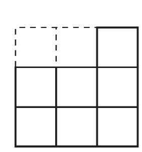
6.【解】(1) 根据主视图可知第一列最多有 3 个小立方块，故 $a=3$，第二列只有 1 个小立方块，故 $b=c=1$，故答案为 3，1，1.

(2) 由主视图得 d，e 中有一个等于 2，一个等于 1 时，小立方块的个数最少，最少个数为 $2+3+1+1+1+1+2=11$；

当 $d=e=2$ 时，小立方块的个数最多，最多个数为 $2+3+1+1+1+2+2=12$.

故答案为 11，12.

(3) 如图所示.



左视图

考点 33　图形的对称、平移和旋转

刷基础

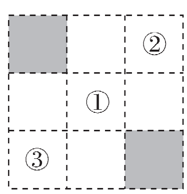
1. D　【解析】A 选项中的图案是轴对称图形，不是中心对称图形，不符合题意；B 选项中的图案不是轴对称图形，也不是中心对称图形，不符合题意；C 选项中的图案不是轴对称图形，也不是中心对称图形，不符合题意；D 选项中的图案既是轴对称图形，又是中心对称图形，符合题意. 故选 D.

2. D　【解析】$\because$ 直线 $y=mx$ 与双曲线 $y=\dfrac{k}{x}$ 相交于 A,B 两点，$\therefore$ 点 A,B 关于原点对称. $\because$ 点 A 坐标为 $(-2,1)$，$\therefore$ 点 B 坐标为 $(2,-1)$，故选 D.

3. C　【解析】$\because$ 将 $\triangle ABC$ 绕点 C 顺时针旋转一定角度后得到 $\triangle A'B'C$，$\therefore AC=A'C$，$\angle1=\angle A'$，$\therefore \angle2=\angle A'=\angle1$，故选项 C 正确，符合题意. $\because BA=BC$，$\therefore \angle1=\angle ACB$，$\therefore \angle1>\angle ACB'$，$\therefore \angle A'>\angle ACB'$，故选项 D 错误. 在 $\triangle ABC$ 中，$BA=BC$，但 $\triangle ABC$ 不一定是等边三角形，故 $AB=AC$ 不一定成立，故选项 A 错误. 在 $\triangle AA'C$ 中，$AC=A'C$，但 $\triangle AA'C$ 不一定是等边三角形，故 $AA'=A'C$ 不一定成立，故选项 B 错误. 故选 C.

4. B　【解析】$\because$ 将线段 AB 平移得到线段 CD，$A(1,0)$，$C(-2,1)$，且点 A 的对应点是点 C，$\therefore$ 平移方式为向左平移 3 个单位，向上平移 1 个单位，$\therefore B(4,2)$ 向左平移 3 个单位，向上平移 1 个单位得到点 D，$\therefore D(4-3,2+1)$，即 $D(1,3)$，故选 B.

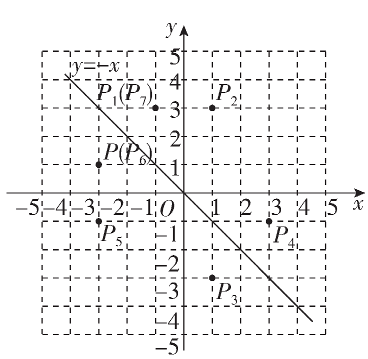
5. C　【解析】如图，①②③任意一处涂上阴影时，能构成轴对称图形，$\therefore$ 所求概率是 $\dfrac{3}{7}$. 故选 C.



6. 2　【解析】由折叠可得，$\angle BED=\angle A=120°$. $\because$ 点 E 在 BC 边上，$\therefore \angle DEC=60°$. $\because AD/\!/BC$，$\angle A=120°$，$\therefore \angle ABC=60°$，$\therefore \angle ABC=\angle DEC$，$\therefore AB/\!/DE$，$\therefore$ 四边形 $ABED$ 为平行四边形，$\therefore DE=AB=4$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle DEC$ 中，$\cos 60°=\dfrac{EC}{DE}$，$\therefore EC=\dfrac{1}{2}\times4=2$.

刷易错

7. D　【解析】如图，因为点 P 的坐标为 $(-3,1)$，所以易得点 P_1 的坐标为 $(-1,3)$，点 P_2 的坐标为 $(1,3)$，点 P_3 的坐标为 $(1,-3)$，点 P_4 的坐标为 $(3,-1)$，点 P_5 的坐标为 $(-3,-1)$，点 P_6 的坐标为 $(-3,1)$，点 P_7 的坐标为 $(-1,3)$，…，由此可见，从点 P_1 开始，变换后的点的坐标以 $(-1,3)$，$(1,3)$，$(1,-3)$，$(3,-1)$，$(-3,-1)$，$(-3,1)$ 为一个循环周期，即每 6 个点一循环. 因为 $2\,024\div6=337\cdots\cdots2$，所以点 $P_{2\,024}$ 的坐标为 $(1,3)$. 故选 D.



易错警示

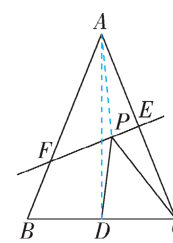
点的坐标规律问题

根据题意得出从点 P_1 开始，变换后的点的坐标以 $(-1,3)$，$(1,3)$，$(1,-3)$，$(3,-1)$，$(-3,-1)$，$(-3,1)$ 为一个循环周期，第 7 次变换后的点 $P_7(-1,3)$ 与 P_1 相同，因此为每 6 个点一循环. 注意应用 $2\,024\div6$ 求得有多少个循环周期，余数是几，而不是用 $2\,024\div7$.

刷提升

1. C　【解析】观察题中图形可知，(1)(3)(4)说法正确. ①⇒③需要改变旋转中心，经过两次旋转得到，不属于平移，原说法错误. 故选 C.

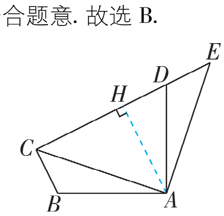
2. B　【解析】如图，连接 PA,AD. $\because EF$ 是 AC 的垂直平分线，$\therefore PA=PC$，$\therefore PC+PD=PA+PD$. 由两点之间线段最短、垂线段最短可知，当点 A,P,D 共线，且 $AD\perp BC$ 时，$PA+PD$ 的值最小，最小值为 AD 的长. $\because$ 在 $\triangle ABC$ 中，$BC=4$，面积是 10，$\therefore$ 此时 $\dfrac{1}{2}BC\cdot AD=\dfrac{1}{2}\times4AD=10$，$\therefore AD=5$，即 $PC+PD$ 的最小值是 5，故选 B.



3. C　【解析】由题意可得 $OA=BC=4$，$OC=AB=3$. 当四边形 $PB'EB$ 是正方形时，$\angle BPB'=90°$，$\therefore \angle CPC'=90°$. 由折叠的性质，可得 $\angle CPO=\angle C'PO=45°$，$\therefore \angle COP=\angle CPO=45°$，$\therefore OC=PC=3$，$\therefore PB=BC-PC=1$. $\because$ 四边形 $PB'EB$ 是正方形，$\therefore PB=BE=1$，$\therefore AE=AB-BE=2$，$\therefore$ 点 E 的坐标为 $(4,2)$，故选 C.

4. B　【解析】A 选项，$\because$ 将 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 沿斜边 AC 的方向平移到 $\triangle DEF$ 的位置，$\therefore AB/\!/DE$，$AC/\!/BE$，$\therefore \angle A=\angle GDC$，$\angle BED=\angle GDC$，$\therefore \angle A=\angle BED$，故 A 正确，不符合题意. B 选项，$\because AB/\!/DE$，$\angle ABC=90°$，$\therefore \angle BGE=90°$，$\therefore BE>BG$，$\therefore BE>4$，而 $\triangle ABC$ 平移的距离应该是 BE 的长度，故 B 错误，符合题意. C 选项，由平移前后的对应点的连线平行或在同一直线上且相等可知，$BE=CF$，故 C 正确，不符合题意. D 选项，$\because \triangle BEG$ 的面积是 4，$BG=4$，$\therefore EG=4\times2\div4=2$. 由平移知 $BC/\!/EF$，$BC=EF=10$，$\therefore CG=10-4=6$，$\therefore$ 四边形 $GCFE$ 的面积为 $(10+6)\times2\div2=16$，故 D 正确，不符合题意. 故选 B.

5. $\sqrt{5}$　【解析】由旋转得 $AC=AE$，$\angle CAE=90°$，$DE=BC=1$，$\therefore \triangle ACE$ 是等腰直角三角形，$CE=CD+DE=3+1=4$. 如图，过点 A 作 $AH\perp CE$ 于点 H，

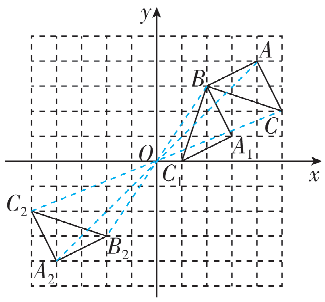


$\therefore CH=HE$，$\therefore AH=\dfrac{1}{2}CE=CH=HE=2$，$\therefore HD=HE-DE=2-1=1$，$\therefore AD=\sqrt{AH^2+HD^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，故答案为$\sqrt{5}$.

刷 素养

6.【解】(1)①如图(1)，$\triangle A_1BC_1$ 即为所求作.

②如图(1)，$\triangle A_2B_2C_2$ 即为所求作.



图(1)

(2)设该点为 $M(x,y)$.

由旋转的性质可知，$MA_1=MA_2$，$MB=MB_2$，$MC_1=MC_2$. 由(1)可知，$B(2,3)$，$C_1(1,0)$，$B_2(-2,-3)$，$C_2(-5,-2)$，

$\therefore \sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}=\sqrt{(x+2)^2+(y+3)^2}$，$\sqrt{(x-1)^2+y^2}=\sqrt{(x+5)^2+(y+2)^2}$，

整理得 $2x+3y=0$，$3x+y=-7$，

解得 $x=-3$，$y=2$，

$\therefore$ 该点为 $M(-3,2)$.

如图(2)，过点 M 作直线 $l/\!/y$ 轴，过点 B 作 $BE\perp l$ 于点 E，过点 B_2 作 $B_2E_2\perp l$ 于点 E_2，连接 BM，B_2M，

则 $\angle BEM=\angle ME_2B_2=90°$，$E(-3,3)$，$E_2(-3,-3)$，

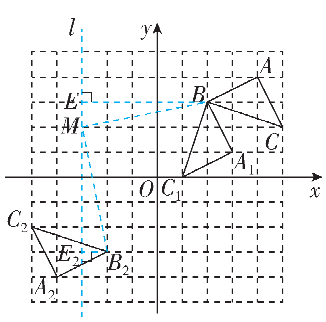
$\therefore BE=ME_2=5$，$EM=E_2B_2=1$，

$\therefore \triangle BEM\cong\triangle ME_2B_2$(SAS)，$\therefore \angle EBM=\angle E_2MB_2$. $\because \angle EBM+\angle BME=90°$，

$\therefore \angle E_2MB_2+\angle BME=90°$，

$\therefore \angle BMB_2=90°$，即旋转角的度数为 90°.

故答案为$(-3,2)$，90°.



图(2)

(3)由网格图易知，$\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，

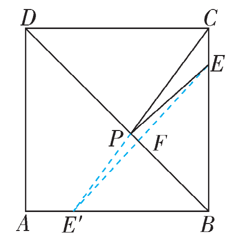
$\therefore \triangle ABC$ 的外接圆半径长等于斜边 BC 的一半. $\because B(2,3)$，$C(5,2)$，$\therefore BC=\sqrt{(2-5)^2+(3-2)^2}=\sqrt{10}$，

$\therefore \triangle ABC$ 的外接圆半径长是$\dfrac{\sqrt{10}}{2}$. 故答案为$\dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

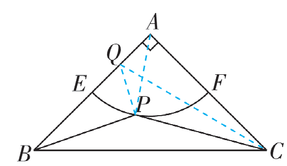
专题13　利用对称性求最值

刷 难关

1. C　【解析】如图，作点 E 关于线段 BD 所在直线的对称点 E'，EE'交 BD 于点 F，连接 CE'交 BD 于点 P. $\because$ 点 E 与点 E'关于线段 BD 所在直线对称，$\therefore BD$ 垂直平分 EE'. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，且正方形是轴对称图形，$\therefore E'$在 AB 边上，$\therefore BE=BE'$，$PE'=PE$，$\therefore \triangle PEC$ 的周长为 $PE+PC+CE=PE'+PC+CE$. $\because$ 两点之间，线段最短，$\therefore$ 当 E'，P，C 三点共线时，$PE'+PC$ 的值最小，最小值为 CE'的长. $\because$ 在 Rt$\triangle CE'B$ 中，$E'C^2=BC^2+BE'^2$，$\therefore E'C=\sqrt{(BE+EC)^2+BE^2}=\sqrt{(4+1)^2+4^2}=\sqrt{41}$，$\therefore \triangle PEC$ 周长的最小值为 $PE'+PC+CE=E'C+CE=\sqrt{41}+1$. 故选 C.



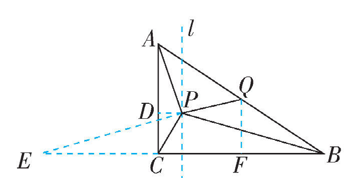
2. C　【解析】如图，在 AB 上截取 $AQ=1$，连接 AP，PQ，CQ. $\because$ 点 E，F 分别是边 AB，AC 的中点，点 P 是以 A 为圆心，AE 为半径的弧 EF 上的动点，$AB=AC=4$，$\therefore AE=AF=AP=\dfrac{1}{2}AB=2$，



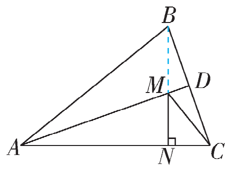
$\therefore \dfrac{AP}{AB}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{AQ}{AP}=\dfrac{1}{2}$，$\therefore \dfrac{AQ}{AP}=\dfrac{AP}{AB}=\dfrac{1}{2}$. $\because \angle PAQ=\angle BAP$，

$\therefore \triangle APQ\backsim\triangle ABP$，$\therefore \dfrac{PQ}{BP}=\dfrac{AP}{AB}=\dfrac{1}{2}$，$\therefore PQ=\dfrac{1}{2}BP$，$\therefore \dfrac{1}{2}BP+PC=PQ+PC\geqslant CQ$. 在 Rt$\triangle ACQ$ 中，$AC=4$，$AQ=1$，$\therefore CQ=\sqrt{AC^2+AQ^2}=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}$，$\therefore \dfrac{1}{2}PB+PC$ 的最小值为$\sqrt{17}$. 故选 C.

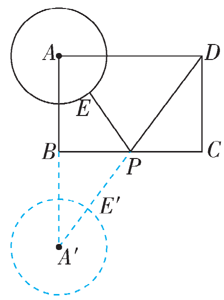
3. C　【解析】$\because \angle ACB=90°$，$AB=10$，$BC=8$，$\therefore AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=6$. 如图，过 P 作 $PD\perp AC$ 于点 D. $\because \triangle ACP$ 的面积为 3，$S_{\triangle ACP}=\dfrac{1}{2}\times AC\times PD$，$\therefore PD=1$. 作直线 $l/\!/AC$，且直线 l 在 AC 右侧距离为 1 的位置，则点 P 在直线 l 上运动且在$\triangle ABC$ 内，$\therefore B$ 到直线 l 的距离为 7. 作 B 关于直线 l 的对称点 E，连接 EQ，交直线 l 于点 P，$\therefore EP=BP$，$\therefore PB+PQ=EP+PQ=EQ$，$\therefore EQ$ 的长即为 $PB+PQ$ 的最小值. 过 Q 作 $QF\perp BC$ 于点 F，$\therefore QF/\!/AC$. $\because$ 点 Q 为 AB 中点，$\therefore QF=\dfrac{1}{2}AC=3$，$BF=\dfrac{1}{2}BC=4$. $\because BE=14$，$BF=4$，$\therefore EF=10$，$\therefore EQ=\sqrt{EF^2+QF^2}=\sqrt{109}$，故选 C.



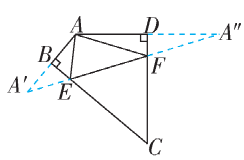
4. B 【解析】如图,过点 B 作 $BN\perp AC$ 于点 N,交 AD 于点 M. ∵ 在 $\triangle ABC$ 中,$AB=AC$,点 D 是边 BC 的中点,∴ $AD\perp BC$,$DC=\frac{1}{2}BC=2$,∴ $AC=\sqrt{AD^2+DC^2}=\sqrt{(4\sqrt{2})^2+2^2}=6$. ∵ M 点和 N 点分别是 AD 和 AC 边上的动点,∴ $MC=MB$,∴ $MN+MC=MN+MB$,∴ 当点 B,M,N 共线,且 $BN\perp AC$ 时,$MN+MC$ 最小,最小值是 BN 的长. ∵ $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BN=\frac{1}{2}BC\cdot AD$,∴ $BN=\frac{BC\cdot AD}{AC}=\frac{4\times4\sqrt{2}}{6}=\frac{8\sqrt{2}}{3}$,故选 B.



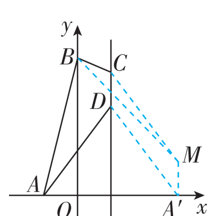
5. A 【解析】如图,作 A 关于 BC 的对称点 A',以 A' 为圆心,2 为半径作 $\odot A'$,连接 $A'D$ 交 $\odot A'$ 于 E',交 BC 于 P,∴ 易知 $PE+PD\geqslant DE'$,∴ 当 D,P,E',A' 四点共线时,$PE+PD$ 取得最小值,为 DE' 的长. ∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形,∴ $\angle A=90°$,$AD=BC=6$,$AA'=2AB=8$,∴ $A'D=\sqrt{AA'^2+AD^2}=\sqrt{8^2+6^2}=10$,∴ $DE'=10-2=8$,∴ $PE+PD$ 的最小值为 8,故选 A.



6. 80° 【解析】如图,分别作 A 关于 BC 和 CD 的对称点 A',A'',连接 $A'A''$,交 BC 于 E,交 CD 于 F,则易知 $A'A''$ 的长即为 $\triangle AEF$ 的周长最小值. ∵ $\angle C=50°$,$\angle ABC=\angle ADC=90°$,∴ $\angle DAB=130°$,A,B,A' 和 A,D,A'' 分别在同一条直线上,∴ $\angle AA'E+\angle A''=50°$. ∵ $EA=EA'$,$FA=FA''$,∴ $\angle EA'A=\angle EAA'$,$\angle FAD=\angle A''$,∴ $\angle EAA'+\angle A''AF=50°$,∴ $\angle EAF=130°-50°=80°$,故答案为 80°.



7. $3\sqrt{2}$ 【解析】如图,作点 A 关于直线 $x=1$ 的对称点 A',记点 A' 正上方 1 个单位长度的点为 M,连接 $A'D$,CM,BM. ∵ 点 A 和点 A' 关于直线 $x=1$ 对称,$A(-1,0)$,∴ $AD=A'D$,$M(3,1)$. ∵ $CD=A'M=1$,$CD/\!/A'M$,∴ 四边形 $CDA'M$ 为平行四边形,∴ $A'D=CM$,∴ $BC+AD=BC+CM\geqslant BM$,∴ 当点 B,C,M 共线时,$BC+CM$ 取得最小值,即为 BM 的长. 又∵ $B(0,4)$,$M(3,1)$,∴ $BM=\sqrt{(3-0)^2+(1-4)^2}=3\sqrt{2}$,即 $BC+AD$ 的最小值为 $3\sqrt{2}$. 故答案为 $3\sqrt{2}$.



专题 14 图形折叠问题

刷难关

1. (1)①【证明】∵ AD 是 $\triangle ABC$ 的高,∴ $\angle BDF=90°=\angle ADC$. ∵ $\angle ABC=45°$,∴ $\angle BAD=45°=\angle ABC$,∴ $BD=AD$. ∵ BE 是 $\triangle ABC$ 的高,

∴ $\angle DBF=90°-\angle C=\angle DAC$.

在 $\triangle BDF$ 和 $\triangle ADC$ 中,$\begin{cases}\angle DBF=\angle DAC,\\ BD=AD,\\ \angle BDF=\angle ADC,\end{cases}$

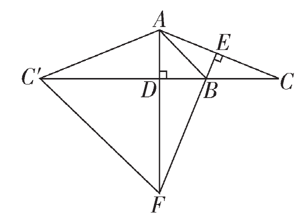
∴ $\triangle BDF\cong\triangle ADC(\text{ASA})$,∴ $BF=AC$.

②【解】由①知 $\triangle BDF\cong\triangle ADC$,

∴ $DF=DC$. ∵ 将 $\triangle ACD$ 沿直线 AD 翻折,点 C 的对应点 C' 落在直线 BC 上,∴ $DC=DC'$,∴ $DF=DC'$,

∴ $\angle FC'D=45°$.

(2)【解】补全图形如图. 证明如下:



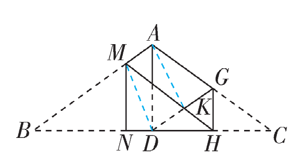
∵ $\angle ABC=135°$,∴ $\angle ABD=45°$. ∵ AD 是 $\triangle ABC$ 的高,∴ $\angle ADB=90°$,∴ $\angle BAD=45°=\angle ABD$,∴ $AD=BD$. ∵ BE 是 $\triangle ABC$ 的高,∴ $\angle BEC=90°=\angle BDF$.

∵ $\angle EBC=\angle DBF$,∴ $\angle DFB=\angle ACD$. ∵ $\angle FDB=\angle ADC=90°$,∴ $\triangle DBF\cong\triangle DAC(\text{AAS})$,∴ $DF=DC$. ∵ 将 $\triangle ACD$ 沿直线 AD 翻折,点 C 的对应点 C' 落在直线 BC 上,∴ $DC=DC'$,∴ $DF=DC'$. ∵ $\angle FDC'=90°$,∴ $\angle DC'F=45°$,∴ $\angle DC'F=\angle ABD$,∴ $C'F/\!/AB$.

2. 【解】(1)四边形 $AEDG$ 是菱形. 理由如下:∵ $AB=AC$,AD 是 BC 边上的中线,∴ $BD=CD=\frac{1}{2}BC$,$AD\perp BC$,∴ $\angle ADB=\angle ADC=90°$. 由折叠得 $BF=DF=\frac{1}{2}BD$,$CH=DH=\frac{1}{2}CD$,$EF\perp BD$,$GH\perp CD$,∴ $EF/\!/GH/\!/AD$,∴ $\frac{BE}{AE}=\frac{BF}{DF}=1$,$\frac{CG}{AG}=\frac{CH}{DH}=1$,∴ $BE=AE$,$CG=AG$,∴ $DE=AE=\frac{1}{2}AB$,$GD=AG=\frac{1}{2}AC$.

∵ $AB=AC$,∴ $DE=AE=GD=AG$,∴ 四边形 $AEDG$ 是菱形.

(2)如图,连接 MD,AK. ∵ $AB=AC=5$,$BC=8$,∴ $\angle B=\angle C$,$BD=CD=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\times8=4$,



∴ $AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\sqrt{25-16}=3$,$CH=DH=\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2}\times4=2$,∴ $BH=BC-CH=8-2=6$. 由折叠得 $BN=HN=\frac{1}{2}BH=\frac{1}{2}\times6=3$,$MN\perp BH$,$\angle MHB=\angle B=\angle GDC=\angle C$,∴ $MN/\!/AD$,$AC/\!/MH$,$AB/\!/GD$,∴ $\triangle MBN\backsim\triangle ABD$,四边形 $AMKG$ 是平行四边形,∴ $\frac{BM}{AB}=\frac{BN}{BD}$,∴ $\frac{BM}{AB}=\frac{3}{4}$,∴ $AM=\frac{1}{4}AB$,∴ $S_{\triangle AMD}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABD}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times4\times3=\frac{3}{2}$. ∵ 四边形 $AMKG$ 是平行四边形,∴ $S_{\square AGKM}=$

$2S_{\triangle AMK}$. ∵ $AB/\!/GD$，∴ $S_{\triangle AMK}=S_{\triangle AMD}=\dfrac{3}{2}$，∴ $S_{\square AGKM}=3$.

(3) $S_{\triangle APQ}=\dfrac{12}{25}$.

由折叠可得 $BQ=B'Q$，$BD=B'D$，$\angle B'=\angle B=\angle GDC=\angle C$，∴ $BC/\!/B'Q$，$BQ/\!/B'D$，∴ 四边形 $BDB'Q$ 是平行四边形. 又 ∵ $BD=B'D=4$，∴ 四边形 $BDB'Q$ 是菱形，∴ $BQ=BD=4$，∴ $AQ=1$. ∵ $B'Q/\!/BC$，∴ $\triangle AQP\backsim\triangle ABC$，∴ $\dfrac{S_{\triangle APQ}}{S_{\triangle ABC}}=\left(\dfrac{AQ}{AB}\right)^2=\dfrac{1}{25}$，∴ $S_{\triangle APQ}=\dfrac{1}{25}\times\dfrac{1}{2}\times8\times3=\dfrac{12}{25}$.

3.【解】(1) 由折叠的性质得 $\angle EFB=\angle EFG$.

∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴ $AD/\!/CB$，∴ $\angle EFB=\angle GEF$，

∴ $\angle EFG=\angle GEF$，∴ $GE=GF$，

∴ $\triangle EFG$ 是等腰三角形.

(2) 过点 G 作 $GH\perp BC$ 于点 H，如图(1).

∵ $AE=x$，$DG=y$，

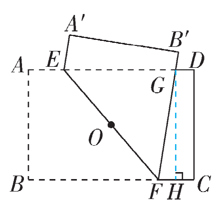
∴ $EG=AD-AE-DG=6-x-y$.

易得四边形 $CDGH$ 为矩形，∴ $CH=GD=y$，$GH=CD=AB=4$.

∵ 点 O 为矩形 $ABCD$ 的对称中心，

∴ $CF=AE=x$，

∴ $FH=CF-CH=x-y$.



图(1)

在 Rt$\triangle GHF$ 中，由勾股定理得 $FH^2+GH^2=GF^2$.

由(1)知 $GE=GF$，

∴ $EG=GF=6-x-y$，

∴ $(x-y)^2+4^2=(6-x-y)^2$，

整理得 $(3-x)y=5-3x$，∴ $y=\dfrac{5-3x}{3-x}$.

(3) 当 $x=1$ 时，$y=\dfrac{5-3}{3-1}=1$，

∴ $AE=1$，$DG=1$. 如图(2)，连接 BO.

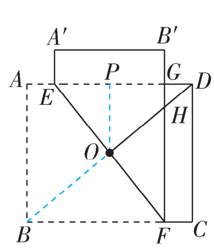
∵ 点 O 为矩形 $ABCD$ 的对称中心，

∴ 点 O 在对角线 BD 上，即 B，O，D 三点共线，且 $OD=\dfrac{1}{2}BD$.

取 AD 的中点 P，连接 OP，

∴ OP 是 $\triangle ABD$ 的中位线，

∴ $OP/\!/AB$，$OP=\dfrac{1}{2}AB=2$，$DP=AP=\dfrac{1}{2}AD=3$，∴ $OP\perp AD$.



图(2)

∵ $AE=1$，∴ $PE=2=OP$，

∴ $\triangle PEO$ 是等腰直角三角形，

∴ $\angle PEO=45°$，∴ $\angle EFG=\angle GEF=45°$，

∴ $\triangle EFG$ 是等腰直角三角形，∴ $\angle EGF=90°$，∴ $FG/\!/PO$，

∴ $\triangle DGH\backsim\triangle DPO$，

∴ $\dfrac{DG}{DP}=\dfrac{DH}{OD}$，即 $\dfrac{DH}{DO}=\dfrac{1}{3}$.

4.【操作判断】【解】如图(1)，

由题意得 $\angle1=\angle2$，$\angle3=\angle4$.

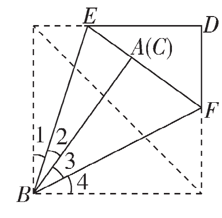
∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴ $\angle1+\angle2+\angle3+\angle4=90°$，

∴ $2(\angle2+\angle3)=90°$，

∴ $\angle2+\angle3=45°$，

即 $\angle EBF=45°$. 故答案为 45°.



图(1)

【探究证明】(1)**【解】**$\triangle BFG$ 是等腰直角三角形.

证明：如图(2)，

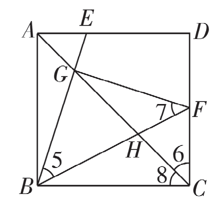
∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴ $\angle6=\angle8=45°$.

∵ $\angle5=45°$，∴ $\angle5=\angle6$.

∵ $\angle GHB=\angle FHC$，∴ $\triangle GHB\backsim\triangle FHC$，

∴ $\dfrac{GH}{FH}=\dfrac{BH}{CH}$，∴ $\dfrac{GH}{BH}=\dfrac{FH}{CH}$.



图(2)

∵ $\angle GHF=\angle BHC$，∴ $\triangle GHF\backsim\triangle BHC$，

∴ $\angle7=\angle8=45°$，∴ $\angle7=\angle5=45°$，

∴ $GB=GF$，$\angle BGF=90°$，

∴ $\triangle BFG$ 是等腰直角三角形.

(2)**【证明】**由折叠得，$\angle AEB=\angle BEF$.

∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴ $\angle D=90°$，即 $AD\perp DC$.

∵ $PQ\perp CD$，∴ $PQ/\!/AD$，

∴ $\angle AEB=\angle EGM$，∴ $\angle BEF=\angle EGM$，

∴ $ME=MG$. ∵ $\angle BGF=90°$，∴ $\angle EGF=90°$，

∴ $\angle EGM+\angle MGF=\angle BEF+\angle EFG=90°$，

∴ $\angle MGF=\angle EFG$，∴ $MG=MF$，

∴ $EM=MF$.

【深入研究】【解】$GH=2\sqrt{2}$.

由[探究证明](1)可知，$GB=GF$，$\angle BGF=90°$，∴ $BF=\sqrt{2}BG$.

由[探究证明](2)知，$EM=MF=2$，

∴ $EF=4$.

由[探究证明](1)知，$\triangle GHB\backsim\triangle FHC$，

∴ $\angle BGH=\angle CFH$.

由折叠得 $\angle CFH=\angle BFE$，∴ $\angle BGH=\angle BFE$.

又 ∵ $\angle GBH=\angle FBE$，

∴ $\triangle GBH\backsim\triangle FBE$，

∴ $\dfrac{GH}{EF}=\dfrac{BG}{BF}$，即 $\dfrac{GH}{4}=\dfrac{BG}{\sqrt{2}BG}$，

解得 $GH=2\sqrt{2}$.

专题15 图形旋转问题

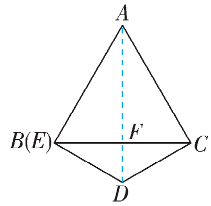
刷难关

1.【解】(1)$AB\perp BD$,$AB=\sqrt{3}BD$.

取 BC 的中点 F,连接 AF,DF,如图(1)所示.

$\because$ $\triangle ABC$ 是等边三角形,

$\therefore$ $\angle ABC=60°$,$AF\perp BC$,$\angle BAF=\frac{1}{2}\angle BAC=30°$.



图(1)

$\because$ $\triangle CDE$ 是等腰三角形,$CD=DE$,$\angle CDE=120°$,$CB=CE$,点 B 和点 E 重合,

$\therefore$ $CD=BD$,$\angle DBC=\frac{1}{2}(180°-\angle CDE)=\frac{1}{2}(180°-120°)=30°$,$DF\perp BC$,

$\therefore$ A,F,D 三点共线,$\angle ABD=\angle ABC+\angle DBC=60°+30°=90°$,

$\therefore$ $AB\perp BD$,$AB=\frac{BD}{\tan\angle BAF}=\frac{BD}{\tan 30°}=\sqrt{3}BD$.

$\therefore$ $AB\perp BD$,$AB=\sqrt{3}BD$.

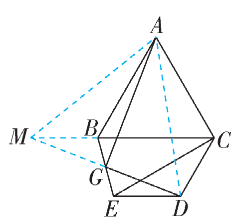
(2)$AG\perp DG$,$AG=\sqrt{3}DG$. 证明如下:

延长 DG 至点 M,使 $GM=GD$,连接 MB,MA,AD,如图(2)所示.

$\because$ G 为 BE 中点,

$\therefore$ $BG=EG$.

在 $\triangle BGM$ 和 $\triangle EGD$ 中,



图(2)

$\begin{cases}BG=EG,\\ \angle BGM=\angle EGD,\\ GM=GD,\end{cases}$

$\therefore$ $\triangle BGM\cong\triangle EGD$(SAS),

$\therefore$ $BM=ED=CD$,$\angle MBG=\angle DEG$.

$\because$ $CD=DE$,$\angle CDE=120°$,

$\therefore$ $\angle DEC=\angle DCE=\frac{1}{2}(180°-\angle CDE)=\frac{1}{2}(180°-120°)=30°$. $\because$ $CB=CE$,

$\therefore$ $\angle CBE=\angle CEB=\frac{1}{2}(180°-\angle BCE)$.

$\because$ $\triangle ABC$ 是等边三角形,

$\therefore$ $AB=AC$,$\angle ABC=\angle ACB=\angle BAC=60°$,

$\therefore$ $\angle ABM=360°-\angle ABC-\angle CBE-\angle MBG$

$=360°-60°-\frac{1}{2}(180°-\angle BCE)-\angle DEG$

$=300°-90°+\frac{1}{2}\angle BCE-\left[\frac{1}{2}(180°-\angle BCE)+30°\right]$

$=90°+\angle BCE$.

$\because$ $\angle ACD=\angle ACB+\angle DCE+\angle BCE$

$=60°+30°+\angle BCE=90°+\angle BCE$,

$\therefore$ $\angle ABM=\angle ACD$.

在 $\triangle ABM$ 和 $\triangle ACD$ 中,

$\begin{cases}AB=AC,\\ \angle ABM=\angle ACD,\\ BM=CD,\end{cases}$

$\therefore$ $\triangle ABM\cong\triangle ACD$(SAS),

$\therefore$ $AM=AD$,$\angle BAM=\angle CAD$,

$\therefore$ $\angle BAC=\angle BAD+\angle CAD=\angle BAD+\angle BAM=\angle DAM=60°$,

$\therefore$ $\triangle ADM$ 是等边三角形. $\because$ $GM=GD$,

$\therefore$ $AG\perp DG$,$\angle DAG=\frac{1}{2}\angle DAM=30°$,

$\therefore$ $AG=\frac{DG}{\tan\angle DAG}=\frac{DG}{\tan 30°}=\sqrt{3}DG$.

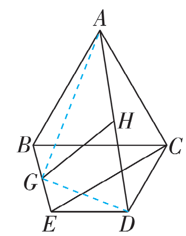
(3)连接 AG,DG,如图(3)所示.

由(2)得 $\angle AGD=90°$.

$\because$ H 为 AD 中点,

$\therefore$ $GH=\frac{1}{2}AD$. 由(1)得 $AB=\sqrt{3}ED$,

$\therefore$ $CD=DE=\frac{\sqrt{3}}{3}AB=\frac{\sqrt{3}}{3}\times3=\sqrt{3}$,



图(3)

$\therefore$ 当点 D 落在 AC 上时,AD 最短,此时 $AD=AC-CD=3-\sqrt{3}$,$\therefore$ $GH=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$.

当点 D 落在 AC 延长线上时,AD 最长,此时 $AD=AC+CD=3+\sqrt{3}$,$\therefore$ $GH=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore$ GH 取值范围为$\frac{3-\sqrt{3}}{2}\leqslant GH\leqslant\frac{3+\sqrt{3}}{2}$.

故答案为$\frac{3-\sqrt{3}}{2}\leqslant GH\leqslant\frac{3+\sqrt{3}}{2}$.

2.【解】(1)$\because$ $AB/\!/CD$,$\therefore$ $\angle B=\angle DFB$.

又$\because$ $\angle DFE=70°$,$\angle BFE=\angle B$,

$\therefore$ $\angle BFE=\angle BFD=\frac{1}{2}\angle DFE=35°$.

(2)FH 平分 $\angle GFD$. 理由如下:

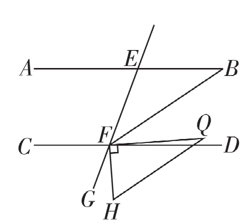
$\because$ $FH\perp FQ$,$\therefore$ $\angle BFD+\angle DFH=90°$,$\angle EFB+\angle GFH=90°$.

由(2)知 $\angle BFE=\angle BFD$,$\therefore$ $\angle DFH=\angle GFH$,

$\therefore$ FH 平分 $\angle GFD$.

(3)设旋转角为 α.

①当 QH 在 BF 右侧,且 QH 与 $\triangle EFB$ 的边 BF 平行时,如图(1).



图(1)

$\because$ $BF/\!/HQ$,$\therefore$ $\angle H+\angle BFH=180°$.

又$\because$ $\angle H=90°-\angle FQH=60°$,

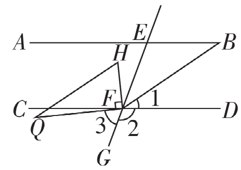
$\therefore$ $\angle BFH=120°$,$\therefore$ $\alpha=\angle BFQ=120°-\angle HFQ=120°-90°=30°$.

当 QH 在 BF 左侧,且 QH 与 $\triangle EFB$ 的边 BF 平行时,如

图(2),

则$\angle HFB=\angle H=60°$,

$\therefore\ \alpha=\angle 1+\angle 2+\angle 3=360°-(\angle HFB+\angle HFQ)=360°-(60°+90°)=210°$.



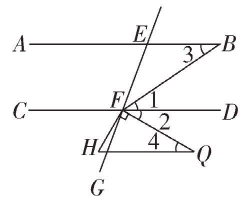
图(2)

②当 QH 与$\triangle EFB$ 的边 BE 平行时,

如图(3),

则$\angle 1=\angle 3=35°$,$HQ/\!/CD$,$\therefore\ \angle 2=\angle 4=30°$,

$\therefore\ \alpha=\angle BFQ=\angle 1+\angle 2=35°+30°=65°$.



图(3)

③当 QH 与$\triangle EFB$ 的边 EF 平行时,

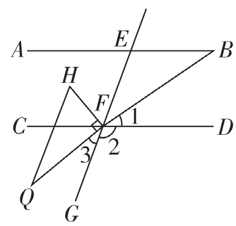
如图(4),

则$\angle 3=\angle Q=30°$.

$\because\ \angle 2=180°-\angle DFE=110°$,

$\therefore\ \alpha=\angle BFQ=\angle 1+\angle 2+\angle 3=35°+110°+30°=175°$.

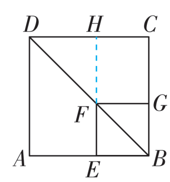
综上,旋转角的度数为 30°或 65°或 175°或 210°.



图(4)

3. (1)【证明】如图,延长 EF 交 CD 于 H.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 和四边形 $BEFG$ 都是正方形,



$\therefore\ \angle C=90°$,$\angle EFG=\angle BGF=90°$,$\angle FDH=45°$,

$\therefore\ \angle HFG=\angle CGF=\angle C=90°$,

$\therefore$ 四边形 $CHFG$ 是矩形,

$\therefore\ FH=CG$,$\angle DHF=\angle FHC=90°$,

$\therefore\ \sin\angle FDH=\dfrac{FH}{DF}=\sin 45°=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$\therefore\ \dfrac{CG}{DF}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

【解】(2)$\dfrac{CG}{DF}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 证明如下:

$\because$ 四边形 $ABCD$ 和四边形 $BEFG$ 都是正方形,

$\therefore\ \angle DBC=\angle FBG=45°$,$\angle BCD=\angle BGF=90°$,

$\therefore\ \angle DBC-\angle FBC=\angle FBG-\angle FBC$,

即$\angle DBF=\angle CBG$.

$\because\ \cos\angle DBC=\cos 45°=\dfrac{BC}{BD}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$\cos\angle FBG=\cos 45°=\dfrac{BG}{BF}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$\therefore\ \dfrac{BC}{BD}=\dfrac{BG}{BF}$,

$\therefore\ \triangle BDF\backsim\triangle BCG$,

$\therefore\ \dfrac{CG}{DF}=\dfrac{BG}{BF}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

(3)$\because$ 四边形 $BEFG$ 是正方形,点 F 是 CG 的中点,

$\therefore\ CF=FG=BG=EF=BE=1$,$\angle G=90°$,$\angle BFG=\angle BFE=\angle FBG=45°$,

$\therefore\ CG=2FG=2$,

$\therefore\ CD=BC=\sqrt{BG^2+CG^2}=\sqrt{5}$.

$\because\ \angle DBC=\angle FBG=45°$,

$\therefore\ \angle DBF=\angle CBG$.

由(2)知$\dfrac{BC}{BD}=\dfrac{BG}{BF}$,

$\therefore\ \triangle BDF\backsim\triangle BCG$,

$\therefore\ \angle BFD=\angle G=90°$,

$\therefore\ \angle DFC=180°-\angle BFD-\angle BFG=45°$,$\angle DFE=\angle BFD-\angle BFE=45°$,

$\therefore\ \angle DFC=\angle DFE$.

$\because\ EF=CF$,$DF=DF$,

$\therefore\ \triangle DEF\cong\triangle DCF$(SAS),

$\therefore\ DE=DC=\sqrt{5}$.

4.【解】(1)$\because$ 矩形 $ABCD$ 中,$AB=4$,$AD=6$,$\therefore\ BC=AD=6$,$\angle A=90°$.

$\because$ 将矩形 $ABCD$ 绕点 B 逆时针旋转得到矩形 $GBEF$,点 E 落在边 AD 上,

$\therefore\ BE=BC=6$,

$\therefore\ AE=\sqrt{BE^2-AB^2}=\sqrt{6^2-4^2}=2\sqrt{5}$,

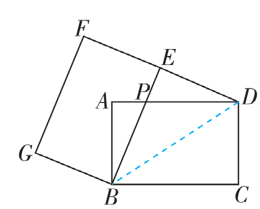
$\therefore\ DE=AD-AE=6-2\sqrt{5}$.

(2)如图(1),连接 BD.

$\because$ 矩形 $ABCD$ 中,$AB=4$,$AD=6$,

$\therefore\ BC=AD=6$,$CD=AB=4$,$\angle C=90°$,

$\therefore\ BD=\sqrt{BC^2+CD^2}=\sqrt{6^2+4^2}=2\sqrt{13}$.



图(1)

$\because$ 将矩形 $ABCD$ 绕点 B 逆时针旋转得到矩形 $GBEF$,点 D,E,F 在一条直线上,

$\therefore\ BE=BC=6$,$\angle BEF=\angle BED=90°$,

$\therefore\ DE=\sqrt{BD^2-BE^2}=\sqrt{(2\sqrt{13})^2-6^2}=4$,

$\therefore\ DE=AB=4$.

$\because\ \angle BED=\angle A=90°$,$\angle APB=\angle EPD$,

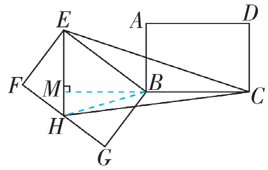
$\therefore\ \triangle APB\cong\triangle EPD$(AAS),$\therefore\ AP=PE$,

$\therefore\ BP=BE-PE=6-AP$.

$\because\ BP^2=AP^2+AB^2$,$\therefore\ (6-AP)^2=AP^2+4^2$,解得 $AP=\dfrac{5}{3}$.

(3)存在. 如图(2),连接 BH,作 $BM\perp EH$ 于点 M.

∵ 将矩形 $ABCD$ 绕点 B 逆时针旋转得到矩形 $GBEF$,



图(2)

∴ $FG=AD=BC=6$, $\angle F=\angle G=90°$, $GB=AB=4$. ∵ 点 H 为边 FG 的中点,

∴ $FH=HG=\dfrac{1}{2}FG=3$,

∴ $HE=HB=\sqrt{GB^2+HG^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$,

∴ 易知当 BM 与 BC 共线且 $CM=BC+BM$ 时, $\triangle CEH$ 面积最大.

∵ $S_{\triangle BEH}=\dfrac{1}{2}S_{矩形BEFG}=\dfrac{1}{2}\times EH\times BM=\dfrac{1}{2}\times4\times6$, ∴ $BM=\dfrac{24}{5}$,

∴ $S_{\triangle CEH}$ 的最大值为 $\dfrac{1}{2}\times5\times\left(6+\dfrac{24}{5}\right)=27$.

C 检测验收练

刷速度

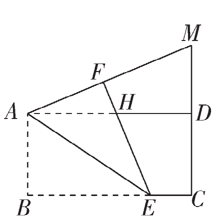
1. B 【解析】A 选项中的图形不是轴对称图形,是中心对称图形,不符合题意;B 选项中的图形既是轴对称图形,也是中心对称图形,符合题意;C 选项中的图形是轴对称图形,不是中心对称图形,不符合题意;D 选项中的图形不是轴对称图形,是中心对称图形,不符合题意. 故选 B.

2. B 【解析】由题图(2)可知,它的左视图是 B 选项中的图形. 故选 B.

3. C 【解析】由作法得 $\angle APQ=\angle B$,故 A 选项不符合题意. ∵ $\angle PAQ=\angle BAC$, ∴ $\angle AQP=\angle C$. ∵ $\angle BQP+\angle AQP=180°$, ∴ $\angle BQP+\angle C=180°$,故 B 选项不符合题意. ∵ $\angle B=\angle APQ$, $\angle A=\angle A$, ∴ $\triangle APQ\backsim\triangle ABC$,故 D 选项不符合题意. $\triangle APQ$ 与 $\triangle ABC$ 的相似比为 $\dfrac{AP}{AB}$,而 $AP=\dfrac{1}{2}AC$, AB 与 AC 不一定相等, ∴ 相似比不一定为 $\dfrac{1}{2}$,故 C 选项符合题意. 故选 C.

4. C 【解析】由题图可知, $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 关于点 $(-1,0)$ 成中心对称. 设点 P' 的坐标为 (x,y),所以 $\dfrac{a+x}{2}=-1$, $\dfrac{b+y}{2}=0$,解得 $x=-a-2$, $y=-b$,所以 $P'(-a-2,-b)$. 故选 C.

5. A 【解析】如图,设 FE 交 AD 于点 H. ∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形, $AB=4$, $BC=8$, ∴ $\angle B=\angle ADC=\angle C=90°$, $AD=BC=8$, $AD/\!/BC$. ∵ 点 E 是线段 BC 上一点, $\dfrac{BE}{CE}=3$, ∴ $\dfrac{BE}{8-BE}=3$,



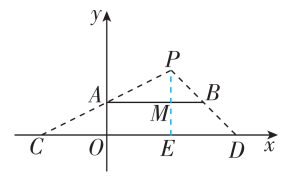
∴ $BE=6$. ∵ 将 $\triangle ABE$ 沿 AE 翻折,得到 $\triangle AFE$, ∴ $AF=AB=4$, $FE=BE=6$, $\angle AFE=\angle B=90°$, $\angle AEH=\angle AEB$. ∵ $AD/\!/BC$, ∴ $\angle EAH=\angle AEB$, ∴ $\angle AEH=\angle EAH$, ∴ $AH=EH=6-FH$.

∵ $AF^2+FH^2=AH^2$, ∴ $4^2+FH^2=(6-FH)^2$,解得 $FH=\dfrac{5}{3}$.

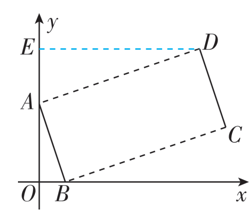
∵ $\angle ADM=180°-\angle ADC=90°$, ∴ $\tan\angle DAM=\dfrac{DM}{AD}=\dfrac{FH}{AF}=\dfrac{\frac{5}{3}}{4}=\dfrac{5}{12}$, ∴ $DM=\dfrac{5}{12}AD=\dfrac{5}{12}\times8=\dfrac{10}{3}$,故选 A.

6. 2 【解析】由作图过程可知, BE 为 $\angle ABC$ 的平分线, ∴ $\angle ABE=\angle CBE$. ∵ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形, ∴ $AD/\!/BC$, ∴ $\angle AEB=\angle CBE$, ∴ $\angle ABE=\angle AEB$, ∴ $AB=AE=3$, ∴ $DE=AD-AE=5-3=2$. 故答案为 2.

7. 6 【解析】过 P 作 $PE\perp x$ 轴于 E,交 AB 于 M,如图. ∵ $P(2,2)$, $A(0,1)$, $B(3,1)$, ∴ $PM=1$, $PE=2$, $AB=3$. ∵ $AB/\!/CD$, ∴ $\triangle PAB\backsim\triangle PCD$, ∴ $\dfrac{AB}{CD}=\dfrac{PM}{PE}$, ∴ $\dfrac{3}{CD}=\dfrac{1}{2}$, ∴ $CD=6$,故答案为 6.



8. $(6,5)$ 【解析】如图,过 D 作 $DE\perp y$ 轴于点 E. ∵ $A(0,3)$, $B(1,0)$, ∴ $OA=3$, $OB=1$. ∵ 将线段 AB 平移得到线段 DC, ∴ $AB/\!/CD$, $AB=CD$, ∴ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, ∴ $AD=BC=2AB$. ∵ $\angle ABC=90°$, ∴ 四边形 $ABCD$ 是矩形, ∴ $\angle DAB=90°$, ∴ $\angle OAB+\angle DAE=90°$. 又∵ $\angle OAB+\angle ABO=90°$, ∴ $\angle ABO=\angle DAE$, ∴ $\sin\angle ABO=\sin\angle EAD$, $\cos\angle ABO=\cos\angle EAD$, ∴ $\dfrac{OA}{AB}=\dfrac{ED}{AD}$, $\dfrac{OB}{AB}=\dfrac{AE}{AD}$, ∴ $\dfrac{3}{AB}=\dfrac{ED}{2AB}$, $\dfrac{1}{AB}=\dfrac{AE}{2AB}$, ∴ $ED=6$, $AE=2$, ∴ $OE=OA+AE=3+2=5$, ∴ 点 D 的坐标是 $(6,5)$. 故答案为 $(6,5)$.



9. 3 【解析】由题意可还原这个立体图形的形状,从左面看得到的图形中的 2 的对面是 5,与 5 相接触的是 3,其对面是 4,与 4 相接触的是 4,其对面是 3;从正面看得到的图形中右下角小正方体正面是 6,后面是 1,右面是 3,左面是 4,上下两个面就是 2,5. 当底面是 5,上面是 2 时,与 2 相接触的是 6,其对面是 1,接触的两个面上的数字之和为 8,则与 1 相接触的是 7,不可能,所以底面只能是 2,上面是 5,与 5 相接触的是 3,其对面是 4,与 4 相接触的还是 4,则★是 3.

10. $2\sqrt{6}$ 【解析】连接 CD, CD', ∴ $CD=CD'$. ∵ A, C, B' 三点共线,由旋转得 $\angle ACB=\angle A'CB'$, ∴ $\angle ACB=\angle A'CB'=90°$,即旋转角为 $90°$, ∴ $\angle DCD'=90°$. ∵ $AC=4$, $\angle A=60°$, ∴ $AB=A'B'=2AC=8$, ∴ 由勾股定理得 $BC=B'C=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{8^2-4^2}=4\sqrt{3}$. ∵ $CD=CD'$, $\angle DCD'=90°$, ∴ $DD'=\sqrt{2}DC$,则当 CD 长度取最小值时, DD' 长度取最小值,则当 $CD\perp AB$ 时, DC 长度取最小值,即 DD' 长度取最小值,此时 $S_{\triangle ABC}=$

$\frac{1}{2}AB\cdot CD=\frac{1}{2}AC\cdot BC$，∴ $CD=AC\cdot BC\div AB=4\times4\sqrt{3}\div8=2\sqrt{3}$，∴ DD'长度的最小值为 $2\sqrt{6}$. 故答案为 $2\sqrt{6}$.

11. (1)【解】由作图可知，ID 垂直平分 BC. ∵ $\angle C=30°$，$DE=3$，

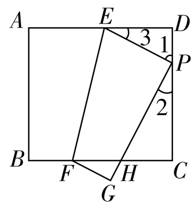
∴ $CD=\frac{DE}{\tan C}=\frac{3}{\tan 30°}=3\sqrt{3}$.

(2)【证明】由作图可得 AK 平分 $\angle BAC$，∴ $\angle KAC=\frac{1}{2}\angle BAC=\frac{1}{2}\times80°=40°$，∴ $\angle AKB=\angle C+\angle CAK=30°+40°=70°$. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle CAB=80°$，$\angle C=30°$，

∴ $\angle B=180°-\angle CAB-\angle C=70°$，∴ $\angle B=\angle AKB$，∴ $AB=AK$，

∴ $\triangle ABK$ 是等腰三角形.

12. (1)【证明】如图(1)，



图(1)

∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴ $\angle A=\angle D=\angle C=90°$，

∴ $\angle 1+\angle 3=90°$.

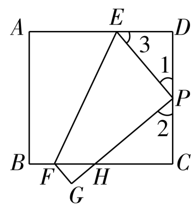
由折叠得 $\angle EPH=\angle A=90°$，

∴ $\angle 1+\angle 2=90°$，∴ $\angle 3=\angle 2$.

又∵ $\angle D=\angle C=90°$，

∴ $\triangle DEP\backsim\triangle CPH$.

【解】(2)如图(2)，



图(2)

∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴ $CD=AB=2$，$AD=BC=3$，$\angle A=\angle D=\angle C=90°$.

∵ P 为 CD 中点，

∴ $DP=CP=\frac{1}{2}\times2=1$.

设 $EP=AE=x$，∴ $ED=AD-AE=3-x$.

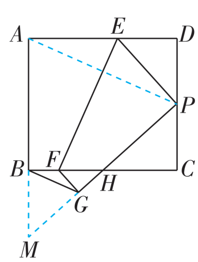
在 $Rt\triangle EDP$ 中，$EP^2=ED^2+DP^2$，

即 $x^2=(3-x)^2+1$，解得 $x=\frac{5}{3}$，

∴ $EP=AE=\frac{5}{3}$，∴ $ED=AD-AE=\frac{4}{3}$.

∵ 由(1)得 $\triangle DEP\backsim\triangle CPH$，∴ $\frac{ED}{PC}=\frac{EP}{PH}$，∴ $\frac{\frac{4}{3}}{1}=\frac{\frac{5}{3}}{PH}$，解得 $PH=\frac{5}{4}$.

∵ $PG=AB=2$，∴ $GH=PG-PH=\frac{3}{4}$.



图(3)

(3) $AB=\sqrt{6}BG$. 理由：如图(3)，延长 AB，PG 交于点 M，连接 AP.

由折叠得 $AE=EP$，$\angle EPG=\angle BAE=90°$，∴ $\angle EAP=\angle EPA$，∴ $\angle BAP=\angle GPA$，∴ $MA=MP$，∴ $\triangle MAP$ 是等腰三角形. ∵ P 为 CD 中点，∴ $DP=CP$. 设 $DP=CP=y$，∴ $AB=PG=CD=2y$. ∵ H 为 BC 中点，∴ $BH=CH$. ∵ $\angle BHM=\angle CHP$，$\angle CBM=\angle PCH$，∴ $\triangle MBH\cong\triangle PCH(ASA)$，∴ $BM=CP=y$，$HM=HP$，∴ $MP=MA=MB+AB=3y$，∴ $HP=\frac{1}{2}PM=\frac{3}{2}y$. 在 $Rt\triangle PCH$ 中，$CH=\sqrt{PH^2-PC^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}y$，∴ $BC=2CH=\sqrt{5}y$，∴ $AD=BC=\sqrt{5}y$，∴ 在 $Rt\triangle APD$ 中，$AP=\sqrt{AD^2+PD^2}=\sqrt{6}y$. ∵ 由折叠易得 $AP\perp EF$，$BG\perp$ 直线 EF，∴ $BG/\!/AP$，

∴ $\triangle BMG\backsim\triangle AMP$，∴ $\frac{BG}{AP}=\frac{BM}{AM}=\frac{1}{3}$，∴ $BG=\frac{\sqrt{6}}{3}y$，∴ $\frac{AB}{BG}=\frac{2y}{\frac{\sqrt{6}}{3}y}=\sqrt{6}$，∴ $AB=\sqrt{6}BG$.

13.【解】(1)∵ $\angle ACB=\angle EDF=90°$，且 $AC=BC=DF=DE=2$，

∴ $\angle A=\angle B=\angle DFE=45°$，

∴ $\angle AFH+\angle BFG=\angle BFG+\angle FGB=135°$，

∴ $\angle AFH=\angle FGB$，∴ $\triangle AFH\backsim\triangle BGF$，

∴ $\frac{AF}{BG}=\frac{AH}{BF}$，∴ $AH\cdot BG=AF\cdot BF$.

在 $Rt\triangle ACB$ 中，$AC=BC=2$，

∴ $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=2\sqrt{2}$.

∵ O 是 AB 的中点，点 O 与点 F 重合，

∴ $AF=BF=\sqrt{2}$，∴ $xy=\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$，∴ $y=\frac{2}{x}$，

∴ y 与 x 的函数关系式为 $y=\frac{2}{x}(1<x<2)$.

(2) $\triangle CGH$ 的周长为 2 cm，理由如下：

∵ $AC=BC=2$，$AH=x$，$BG=y$，∴ $CH=2-x$，$CG=2-y$，

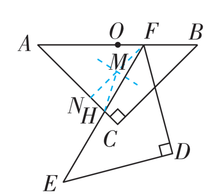
∴ 在 $Rt\triangle HCG$ 中，$GH=\sqrt{CH^2+CG^2}=\sqrt{(2-x)^2+(2-y)^2}=\sqrt{(x+y)^2-2xy-4(x+y)+8}$，

将(1)中 $xy=2$ 代入得 $GH=\sqrt{(x+y)^2-4(x+y)+4}=\sqrt{(x+y-2)^2}=|x+y-2|$.

∵ $1<x<2$，$y=\frac{2}{x}$，∴ $1<y<2$，∴ $x+y>2$，∴ $GH=x+y-2$，

∴ $\triangle CHG$ 的周长为 $CH+CG+GH=2-x+2-y+x+y-2=2(cm)$.

(3)①当 EF 与 AC 边相交时，设交点为 H，过点 F 作 $FN\perp AC$ 于点 N，作 FH 的垂直平分线交 FN 于点 M，连接 MH，如图(1). ∵ $\angle AFE=60°$，$\angle A=45°$，∴ $\angle AHF=75°$.



图(1)

由垂直平分线的性质得 $FM=MH$.

∵ $\angle FNH=90°$，∴ $\angle NFH=15°$.

∵ $FM=MH$，∴ $\angle NFH=\angle MHF=15°$，

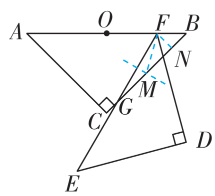
∴ $\angle NMH=30°$.

在 $Rt\triangle MNH$ 中，设 $NH=k$，∴ $MH=MF=2k$，

$\therefore MN=\sqrt{3}k$，$\therefore FN=MF+MN=(2+\sqrt{3})k$.

在 Rt△FNH 中，$\tan\angle FHN=\dfrac{FN}{NH}=2+\sqrt{3}$.

②当 EF 与 BC 边相交时，设交点为 G，过点 F 作 $FN\perp BC$ 于点 N，作 FG 的垂直平分线交 BG 于点 M，连接 FM，如图(2).



图(2)

$\because \angle AFE=60°$，$\angle B=45°$，

$\therefore \angle FGB=\angle AFE-\angle B=15°$.

由垂直平分线的性质得 $GM=MF$，

$\therefore \angle FGB=\angle GFM=15°$，

$\therefore \angle FMB=30°$.

在 Rt△FNM 中，设 $FN=k$，$\therefore GM=MF=2k$，

由勾股定理得 $MN=\sqrt{3}k$，

$\therefore GN=GM+MN=(2+\sqrt{3})k$.

在 Rt△FNG 中，$\tan\angle FGN=\dfrac{FN}{GN}=2-\sqrt{3}$.

综上所述，△DEF 纸片的斜边 EF 与△ABC 纸片的直角边所夹锐角的正切值为 $2+\sqrt{3}$ 或 $2-\sqrt{3}$，

故答案为 $2+\sqrt{3}$ 或 $2-\sqrt{3}$.

图形与几何综合训练

刷综合

1. A 【解析】

选项	理由	结论
A	是轴对称图形，但不是中心对称图形	符合题意
B	是轴对称图形，也是中心对称图形	不符合题意
C	是轴对称图形，也是中心对称图形	不符合题意
D	不是轴对称图形，是中心对称图形	不符合题意

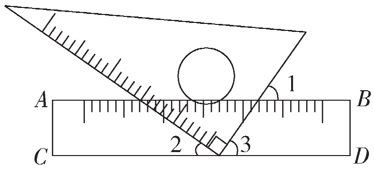
刷有所得

轴对称图形和中心对称图形

一个图形沿一条直线折叠，如果直线两旁的部分能够互相重合，那么这个图形就叫作轴对称图形；把一个图形绕着某一个点旋转 180°，如果旋转后的图形能够与原来的图形重合，那么这个图形叫作中心对称图形，这个点就是它的对称中心.

2. A 【解析】根据主视图和俯视图可知，该几何体为 A 选项中的图形. 故选 A.

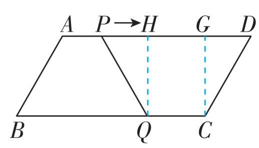
3. B 【解析】如图，$\because \angle 1=55°$，$AB/\!/CD$，$\therefore \angle 3=\angle 1=55°$，$\therefore \angle 2=180°-90°-\angle 3=35°$. 故选 B.



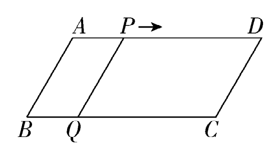
4. B 【解析】$\because \angle C=90°$，$\angle B=40°$，$\therefore \angle BAC=90°-\angle B=90°-40°=50°$. 由作图知 AP 平分 $\angle BAC$，$\therefore \angle BAD=\dfrac{1}{2}\angle BAC=\dfrac{1}{2}\times 50°=25°$. 又$\because \angle ADC=\angle B+\angle BAD$，$\therefore \angle ADC=40°+25°=65°$. 故选 B.

5. B 【解析】由已知可得，P 从 A 到 D 需要 12 s，Q 从 C 到 B(或从 B 到 C)需要 4 s. 设 P，Q 的运动时间为 t s.

①当 $0\leqslant t\leqslant 4$ 时，(i)点 Q 在点 P 右侧时，过 Q 作 $QH\perp AD$ 于 H，过 C 作 $CG\perp AD$ 于 G，如图(1). 易得四边形 $HQCG$ 为矩形，$AP=t$ cm，$CQ=3t$ cm，$\therefore GH=3t$ cm. $\because PD/\!/CQ$，$PQ=CD$，$\therefore$ 四边形 $CQPD$ 是等腰梯形，$\therefore \angle QPH=\angle D=\angle B=60°$，$\therefore \angle PQH=\angle GCD=30°$. $\because PQ=CD=AB=6$ cm，$\therefore PH=\dfrac{1}{2}PQ=3$ cm，$DG=\dfrac{1}{2}CD=3$ cm. $\because AP+PH+GH+DG=AD=BC=12$ cm，$\therefore t+3+3t+3=12$，解得 $t=1.5$.



图(1)

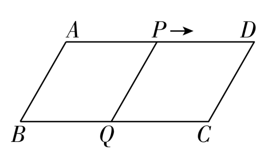


图(2)

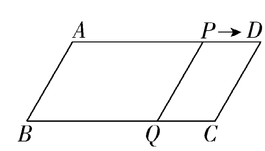
(ii)点 Q 在点 P 左侧时，易得四边形 $CQPD$ 是平行四边形，如图(2). 此时 $PD=CQ=3t$ cm，$AP=t$ cm，$\therefore t+3t=12$，解得 $t=3$，$\therefore$ 运动时间为 1.5 s 或 3 s 时，$PQ=CD$.

②当 $4<t\leqslant 8$ 时，(i)点 Q 在点 P 左侧时，易得四边形 $CQPD$ 是平行四边形，如图(3). 此时 $BQ=3(t-4)$ cm，$AP=t$ cm. $\because AD=BC$，$PD=CQ$，$\therefore BQ=AP$，$\therefore 3(t-4)=t$，解得 $t=6$.

(ii)点 Q 在点 P 右侧时，由①知，此时四边形 $CQPD$ 是以 CD，PQ 为腰的等腰梯形，这种情况在 $4<t\leqslant 8$ 时不存在，$\therefore$ 运动时间为 6 s 时，$PQ=CD$.



图(3)



图(4)

③当 $8<t\leqslant 12$ 时，(i)点 Q 在点 P 左侧时，四边形 $CQPD$ 是平行四边形，如图(4). 此时 $CQ=3(t-8)$ cm，$PD=(12-t)$ cm，$\therefore 3(t-8)=12-t$，解得 $t=9$.

(ii)同②可知点 Q 在点 P 右侧时的情况在 $8<t\leqslant 12$ 时不存在，$\therefore$ 运动时间为 9 s 时，$PQ=CD$.

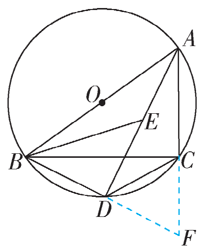
综上所述，运动时间为 1.5 s 或 3 s 或 6 s 或 9 s 时，$PQ=CD$.

故选 B.

6. C 【解析】$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，$\therefore \angle DAB=90°$，$\therefore \angle DAE+\angle BAH=90°$. $\because$ △ADE 和△BHA 都是直角三角形，$\therefore \angle AED=\angle BHA=90°$，$\therefore \angle ABH+\angle BAH=90°$，$\therefore \angle DAE=$

$\angle ABH$，$\therefore \triangle ADE\backsim\triangle BAH$，$\therefore \dfrac{DE}{AH}=\dfrac{AD}{AB}$. 根据全等三角形的性质，设 $AE=CG=GH=EF=a$，$DE=EH=FG=BG=b$，$\therefore AH=AE-EH=a-b$，$BH=GH+BG=a+b$，$\dfrac{EH}{AH}=\dfrac{AD}{AB}$. 在 Rt$\triangle ADE$ 中，由勾股定理得 $AD=\sqrt{AE^2+DE^2}=\sqrt{a^2+b^2}$，在 Rt$\triangle ABH$ 中，由勾股定理得 $AB=\sqrt{AH^2+BH^2}=\sqrt{(a-b)^2+(a+b)^2}=\sqrt{2(a^2+b^2)}$，$\therefore \dfrac{AD}{AB}=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{2(a^2+b^2)}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore \dfrac{EH}{AH}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 故选 C.

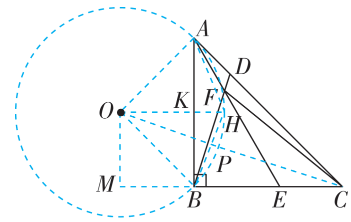
7. C　【解析】延长 AC，BD 交于点 F，如图. $\because$ 点 E 为 AD 中点，$\therefore$ 设 $AE=DE=a$，则 $AD=2a$. $\because AD$ 平分 $\angle BAC$，BE 平分 $\angle ABC$，$\therefore \angle EAB=\angle EAC=\dfrac{1}{2}\angle BAC$，$\angle EBA=\angle EBC=\dfrac{1}{2}\angle ABC$. 由圆周角定理的推论得



$\angle DBC=\angle EAC=\dfrac{1}{2}\angle BAC$，$\therefore \angle DBE=\angle DBC+\angle EBC=\dfrac{1}{2}(\angle BAC+\angle ABC)$. $\because \angle DEB=\angle EAB+\angle EBA=\dfrac{1}{2}(\angle BAC+\angle ABC)$，$\therefore \angle DBE=\angle DEB$，$\therefore DB=DE=a$. $\because AB$ 是$\odot O$ 的直径，$\therefore \angle ADB=\angle ADF=90°$. 在 Rt$\triangle ADB$ 中，由勾股定理得 $AB=\sqrt{AD^2+BD^2}=\sqrt{(2a)^2+a^2}=\sqrt{5}\,a$. 在 $\triangle ADB$ 和 $\triangle ADF$ 中，$\begin{cases}\angle ADB=\angle ADF=90°,\\ AD=AD,\\ \angle EAB=\angle EAC,\end{cases}$

$\therefore \triangle ADB\cong\triangle ADF$ (ASA)，$\therefore AB=FA=\sqrt{5}\,a$，$BD=FD=a$，$\therefore BF=BD+FD=2a$. $\because AB-AC=4$，$\therefore AB-AC=AF-AC=CF=4$. $\because$ 四边形 $ABDC$ 是$\odot O$ 的内接四边形，$\therefore$ 易得 $\angle FDC=\angle FAB$. 又$\because \angle F=\angle F$，$\therefore \triangle FDC\backsim\triangle FAB$，$\therefore \dfrac{FC}{FB}=\dfrac{FD}{FA}$，$\therefore \dfrac{4}{2a}=\dfrac{a}{\sqrt{5}a}$，$\therefore a=2\sqrt{5}$，$\therefore AB=\sqrt{5}a=10$，$\therefore \odot O$ 的半径是 5. 故选 C.

8. D　【解析】①$\because \triangle ABC$ 是等腰直角三角形，$\angle ABC=90°$，$AB=4$，$\therefore \angle BCA=\angle BAC=45°$，$AB=BC=4$，$\therefore AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=4\sqrt{2}$，$\therefore \dfrac{AC}{AB}=\dfrac{4\sqrt{2}}{4}=\sqrt{2}$. $\because AD=\dfrac{\sqrt{2}}{2}CE$，$\therefore \dfrac{CE}{AD}=\sqrt{2}$，$\therefore \dfrac{AC}{AB}=\dfrac{CE}{AD}$. 又$\because \angle ECA=\angle DAB=45°$，$\therefore \triangle CAE\backsim\triangle ABD$，$\therefore \dfrac{AE}{BD}=\dfrac{AC}{AB}=\sqrt{2}$，故①正确. ②$\because \triangle CAE\backsim\triangle ABD$，$\therefore \angle CAE=\angle ABD$，$\therefore \angle BFE=\angle BAF+\angle ABD=\angle BAF+\angle CAE=\angle BAC=45°$，$\therefore \angle DFE=180°-\angle BFE=180°-45°=135°$，故②正确. ③以 AB 为斜边在$\triangle ABC$ 外侧构造等腰 Rt$\triangle OAB$，以点 O 为圆心，OA 为半径作$\odot O$，过点 O 作 $OK\perp AB$ 于 K，OK 的延长线交$\odot O$ 于 H，连接 AH，BH，过点 O 作 $OM\perp CB$ 交 CB 的延长线于 M，连接 OC 交$\odot O$ 于 P，如图.

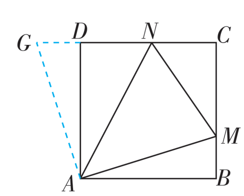


$\because \angle AOB=90°$，$\therefore \angle AHB=180°-\dfrac{1}{2}\angle AOB=180°-\dfrac{1}{2}\times90°=135°$. $\because \angle DFE=135°$，$\therefore \angle AFB=135°$，$\therefore$ 点 F 在 $\overset{\frown}{AB}$ 上运动，$\therefore$ 当点 F 与点 H 重合时，$\triangle ABF$ 的面积最大，最大值为$\triangle ABH$ 的面积. 在等腰 Rt$\triangle AOB$ 中，$AK=BK=\dfrac{1}{2}AB=2$，$\angle AOH=45°$，$\therefore AK=OK=2$. 在 Rt$\triangle AOK$ 中，由勾股定理得 $OA=\sqrt{AK^2+OK^2}=2\sqrt{2}$，$\therefore OA=OH=OB=OP=2\sqrt{2}$，$\therefore KH=OH-OK=2\sqrt{2}-2$，$\therefore S_{\triangle ABH}=\dfrac{1}{2}\times AB\times KH=\dfrac{1}{2}\times4\times(2\sqrt{2}-2)=4\sqrt{2}-4$，故③正确. ④由③知，点 F 在 $\overset{\frown}{AB}$ 上运动，$\therefore$ 当点 F 与点 P 重合时，CF 的值最小，最小值为线段 CP 的长. $\because OM\perp CB$，$OK\perp AB$，$\angle ABM=\angle ABC=90°$，$\therefore$ 四边形 $OMBK$ 为矩形，$\therefore OM=BK=2$，$BM=OK=2$，$\therefore CM=BC+BM=4+2=6$. 在 Rt$\triangle COM$ 中，由勾股定理得 $CO=\sqrt{CM^2+OM^2}=2\sqrt{10}$，$\therefore CP=CO-OP=2\sqrt{10}-2\sqrt{2}$，即 CF 的最小值是 $2\sqrt{10}-2\sqrt{2}$，故④正确. 综上，正确的结论是①②③④. 故选 D.

9. 六　【解析】$\because$ 一个正多边形的外角和与内角和的比为 1∶2，$\therefore$ 这个正多边形的内角和为 $360°\times2=720°$，$\therefore$ 这个正多边形的边数为 $720°\div180°+2=4+2=6$，$\therefore$ 这个正多边形是正六边形. 故答案为六.

10. $64-9\pi$　【解析】剪下的扇形面积为 $\dfrac{45\pi\times8^2}{360}=8\pi$. 设围成圆锥的底面圆的半径为 r，则 $2\pi r=\dfrac{45\pi\times8}{180}$，解得 $r=1$. 所以纸片剩下部分（即阴影部分）的面积为 $8^2-8\pi-\pi\times1^2=64-9\pi$. 故答案为 $64-9\pi$.

11. $2\sqrt{2}-2$　【解析】如图，延长 CD 至点 G，使 $DG=BM$，连接 AG. $\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，$\therefore AD=AB$，$\angle BAD=\angle MBA=\angle ADN=90°$，$\therefore \angle ADG=\angle ADN=90°=\angle ABM$. 又$\because BM=DG$，$AD=AB$，$\therefore \triangle ABM\cong\triangle ADG$ (SAS)，$\therefore \angle BAM=\angle DAG$，$AM=AG$.



$\because \angle MAN=45°$，$\therefore \angle BAM+\angle DAN=45°$，$\therefore \angle DAG+\angle DAN=45°$，即$\angle GAN=45°$，$\therefore \angle GAN=\angle MAN$. 在$\triangle GAN$ 和$\triangle MAN$ 中，$\begin{cases}AG=AM,\\ \angle GAN=\angle MAN,\\ AN=AN,\end{cases}$ $\therefore \triangle GAN\cong\triangle MAN$ (SAS)，$\therefore GN=$

$MN=DN+DG=DN+BM$. 设 $BM=x$, $MN=y$, 则 $GN=y$, $DG=x$. $\because BC=CD=1$, $\therefore CM=1-x$, $CN=x-y+1$. 在 $Rt\triangle CMN$ 中，由勾股定理得 $MN^2=CM^2+CN^2$，即 $y^2=(1-x)^2+(x-y+1)^2$，整理可得 $y=\dfrac{x^2+1}{x+1}=\dfrac{(x+1)^2-2(x+1)+2}{x+1}=x+1+\dfrac{2}{x+1}-2$.

$\because \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{\dfrac{2}{x+1}}\right)^2\geqslant 0$，即 $x+1-2\sqrt{(x+1)\cdot\dfrac{2}{x+1}}+\dfrac{2}{x+1}\geqslant 0$, $\therefore x+1+\dfrac{2}{x+1}\geqslant 2\sqrt{(x+1)\cdot\dfrac{2}{x+1}}=2\sqrt{2}$, $\therefore y\geqslant 2\sqrt{2}-2$, $\therefore y$ 的最小值为 $2\sqrt{2}-2$，此时 $x=\sqrt{2}-1$. 故 MN 的最小值为 $2\sqrt{2}-2$.

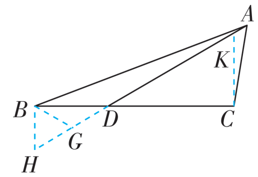
刷有所得

半角模型

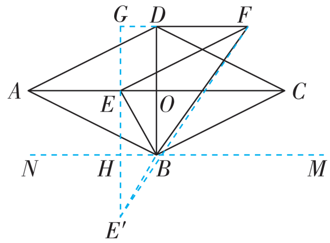
两个角有公共顶点，较小角在较大角的内部，度数等于较大角的一半，且组成这个较大角的两边相等，这样的几何模型称为半角模型，一般通过几何变换得到全等三角形来解决这类问题.

12. 1 或 $\dfrac{8}{5}$ 【解析】$\because \triangle ABC$ 为等边三角形，$\therefore AB=BC=AC=4$, $\angle A=\angle B=\angle C=60°$. 设 $BD=x$, $\therefore CD=4-x$. $\because DE\perp BC$, $\angle B=60°$, $\therefore \angle BED=30°$, $\therefore BE=2BD=2x$, $\therefore AE=AB-BE=4-2x$. $\because DF/\!/AB$, $\therefore \dfrac{AF}{AC}=\dfrac{BD}{BC}$. $\because AC=BC$, $\therefore AF=BD=x$. $\because \triangle AEF$ 为直角三角形，$\angle A=60°$, $\therefore$ ①当 $\angle AFE=90°$ 时，$\angle AEF=30°$, $\therefore AE=2AF=2x$. 又 $\because AE=4-2x$, $\therefore 2x=4-2x$, $\therefore x=1$，即 $BD=1$. ②当 $\angle AEF=90°$ 时，$\angle AFE=30°$. $\because AE=4-2x$, $\therefore AF=2AE=2(4-2x)$. 又 $\because AF=BD=x$, $\therefore 2(4-2x)=x$, $\therefore x=\dfrac{8}{5}$，即 $BD=\dfrac{8}{5}$. 故答案为 1 或 $\dfrac{8}{5}$.

13. $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{21}}{3}$ 【解析】如图，过 C 点作 $CK\perp CD$ 交 AD 于点 K，则 $\angle KCD=90°$. $\because \angle ADC=30°$, $\therefore \angle DKC=60°$, $DK=2CK$, $\therefore \angle AKC=120°$, $\angle ACK=60°-\angle CAK$. $\because BD=1$, $BC=\sqrt{7}$, $\therefore CD=\sqrt{7}-1$, $\therefore CK=\dfrac{\sqrt{3}}{3}CD=\dfrac{\sqrt{21}-\sqrt{3}}{3}$, $\therefore DK=\dfrac{2\sqrt{21}-2\sqrt{3}}{3}$. 作 $BH\perp BC$ 交 AD 的延长线于点 H，在 HD 上截取 $HG=HB$，连接 BG. $\because \angle HBD=90°$, $\angle BDH=\angle ADC=30°$, $\therefore \angle H=60°$, $DH=2BH$, $\therefore \triangle BHG$ 是等边三角形，$\therefore BG=BH$, $\angle GBH=\angle BGH=60°$, $\therefore \angle GBD=\angle BDH=30°$, $\angle BGA=120°$, $\therefore DG=BG=BH$. $\because \angle BDH=30°$, $\therefore DG=BG=BH=\dfrac{\sqrt{3}}{3}BD=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\therefore KG=DK+DG=\dfrac{2\sqrt{21}-2\sqrt{3}}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{2\sqrt{21}-\sqrt{3}}{3}$. $\because \angle BAC=60°$, $\therefore \angle BAG=60°-\angle CAK$, $\therefore \angle ACK=\angle BAG$. $\because \angle AKC=\angle BGA=120°$, $\therefore \triangle AKC\backsim\triangle BGA$, $\therefore \dfrac{AK}{BG}=\dfrac{CK}{AG}$, $\therefore \dfrac{AK}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\dfrac{\frac{\sqrt{21}-\sqrt{3}}{3}}{AK+\frac{2\sqrt{21}-\sqrt{3}}{3}}$，整理得 $3AK^2+(2\sqrt{21}-\sqrt{3})AK+1-\sqrt{7}=0$，解得 $AK=\dfrac{3\sqrt{3}-\sqrt{21}}{3}$ 或 $AK=\dfrac{-2\sqrt{3}-\sqrt{21}}{3}$（不符合题意，舍去），$\therefore AD=AK+DK=\dfrac{3\sqrt{3}-\sqrt{21}}{3}+\dfrac{2\sqrt{21}-2\sqrt{3}}{3}=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{21}}{3}$，故答案为 $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{21}}{3}$.



14. $\sqrt{13}$ 【解析】$\because$ 四边形 $DAEF$ 为平行四边形，$\therefore DF/\!/AE$, $DF=AE$. 如图，过点 B 作 $MN/\!/AC$，作点 E 关于 MN 的对称点 E'，连接 BE', $E'F$.



由对称性得 $BE=BE'$, $EE'\perp MN$, $\therefore BE+BF=BE'+BF\geqslant E'F$，当且仅当 E', B, F 三点共线时，$BE+BF$ 取得最小值，为 $E'F$ 的长.

设 AC 与 BD 交于点 O, EE' 交 MN 于点 H，延长 $E'E$ 交 FD 的延长线于点 G，则 $EH=E'H$.

在菱形 $ABCD$ 中，$AC=4$, $BD=2$, $\therefore AO=\dfrac{1}{2}AC=2$, $BO=DO=\dfrac{1}{2}BD=1$, $AC\perp BD$. $\because AC/\!/MN$, $EE'\perp MN$, $\therefore AC\perp GH$, $\therefore \angle OEH=\angle EOB=\angle EHB=90°$, $\therefore$ 四边形 $EOBH$ 是矩形，$\therefore E'H=EH=OB=1$. 同理易得四边形 $DOEG$ 是矩形，$\therefore GD=EO$, $GE=DO=1$, $\therefore GF=GD+DF=EO+AE=AO=2$, $GE'=GE+EH+E'H=3$, $\therefore E'F=\sqrt{GF^2+GE'^2}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$，即 $BE+BF$ 的最小值为 $\sqrt{13}$，故答案为 $\sqrt{13}$.

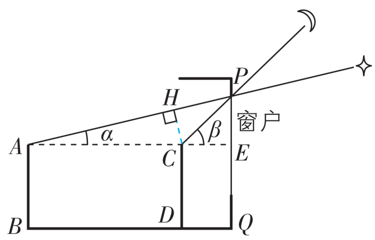
15.【解】(1)由题意可得，$PQ\perp AE$，$PQ=2.6\ \text{m}$，$AB=CD=EQ=1.6\ \text{m}$，$AE=BQ=4\ \text{m}$，$AC=BD=3\ \text{m}$，$\therefore CE=AE-AC=4-3=1(\text{m})$，$PE=PQ-EQ=2.6-1.6=1(\text{m})$，$\angle CEP=90^\circ$，

$\therefore CE=PE$，$\therefore \beta=\angle PCE=45^\circ$，$\tan\alpha=\tan\angle PAE=\frac{PE}{AE}=\frac{1}{4}$.

(2)$\because CE=PE=1\ \text{m}$，$\angle CEP=90^\circ$，

$\therefore CP=\sqrt{CE^2+PE^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}(\text{m})$.

如图，过 C 作 $CH\perp AP$ 于 H.



$\because \tan\alpha=\tan\angle PAE=\frac{CH}{AH}=\frac{1}{4}$，$\therefore$ 设 $CH=x\ \text{m}$，则 $AH=4x\ \text{m}$，

$\therefore x^2+(4x)^2=AC^2=9$，解得 $x=\frac{3\sqrt{17}}{17}$(负值已舍去)，

$\therefore CH=\frac{3\sqrt{17}}{17}\ \text{m}$，$\therefore \sin\angle APC=\frac{CH}{CP}=\frac{\frac{3\sqrt{17}}{17}}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{34}}{34}$.

16. (1)【证明】$\because GF$ 是 $\odot O$ 的切线，$\therefore DF\perp GF$.

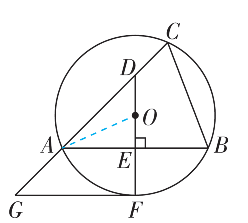
$\because DF\perp AB$，$\therefore AB/\!/GF$，$\therefore \angle BAC=\angle G=45^\circ$，$\therefore \angle FDG=90^\circ-45^\circ=45^\circ$，$\therefore \angle G=\angle FDG$，$\therefore FD=FG$.

(2)【解】$\because DF\perp AB$，$\therefore AE=BE=\frac{1}{2}AB=6$.

$\because \angle BAC=45^\circ$，$\therefore \angle ADE=90^\circ-45^\circ=45^\circ$，$\therefore \angle EAD=\angle ADE$，$\therefore EA=ED=6$.

由(1)得 $FD=FG=10$，$\therefore EF=DF-DE=10-6=4$.

如图所示，连接 OA，设 $OE=x$，则 $OF=OE+EF=x+4=OA$.



在 $\text{Rt}\triangle AOE$ 中，$OA^2=AE^2+OE^2$，

$\therefore (x+4)^2=6^2+x^2$，解得 $x=\frac{5}{2}$，

$\therefore OA=x+4=\frac{5}{2}+4=\frac{13}{2}$，$\therefore \odot O$ 的半径为 $\frac{13}{2}$.

17. (1)【证明】$\because DE$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线，

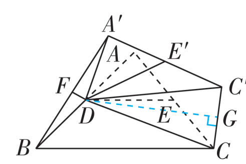
$\therefore DE=\frac{1}{2}BC$ 且 $AD=DB=\frac{1}{2}AB$.

又$\because \triangle ADC$ 绕点 D 按逆时针方向旋转得到 $\triangle A'DC'$，点 E 的对应点 E' 与点 A 重合，$\therefore DE=AD$，$\therefore AB=BC$.

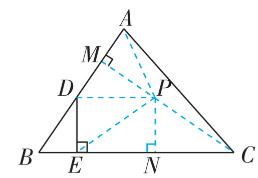
(2)【证明】由题意可知，$DC=DC'$，$DA=DA'$，$\angle CDC'=\angle ADA'$. 作 $DG\perp CC'$ 于点 G，如图(1)所示，则 $CG=C'G=\frac{1}{2}CC'$，且 $\angle CDG=\angle C'DG=\frac{1}{2}\angle CDC'$.

$\because BD=DA=DA'$，$\therefore \angle A'BD=\angle BA'D$. $\because \angle A'DA=\angle A'BD+\angle BA'D$，$\therefore \angle A'BD=\frac{1}{2}\angle A'DA$，$\therefore \angle A'BD=\angle CDG$. $\because DB=DA'$，DF 是 $\triangle A'BD$ 的中线，$\therefore DF\perp A'B$，$\therefore \angle BFD=90^\circ$，

$\therefore \triangle BFD\backsim\triangle DGC$，$\therefore \frac{DF}{CG}=\frac{BD}{CD}$，$\therefore \frac{DF}{\frac{1}{2}C'C}=\frac{BD}{CD}$，$\therefore 2DF\cdot CD=BD\cdot CC'$.



图(1)



图(2)

(3)【解】存在.

证明：$\because DE\perp BC$，$\therefore \angle DEB=90^\circ$，$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle BDE$ 中，$DE=BE\cdot\tan B=3\times\frac{4}{3}=4$，$\therefore BD=\sqrt{BE^2+DE^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$. 如图(2)，过点 C 作 $CM\perp AB$ 于点 M，$\therefore \angle CMB=\angle DEB=90^\circ$.

又$\because \angle B=\angle B$，$\therefore \triangle BDE\backsim\triangle BCM$，

$\therefore \frac{BD}{BC}=\frac{DE}{CM}=\frac{BE}{BM}$，即 $\frac{5}{3+\frac{32}{3}}=\frac{3}{BM}$，$\therefore BM=\frac{41}{5}$，$\therefore DM=BM-BD=\frac{41}{5}-5=\frac{16}{5}$. $\because AD=\frac{32}{5}$，$\therefore DM=\frac{1}{2}AD$，$\therefore$ 点 M 是 AD 的中点，$\therefore CM$ 是 AD 的垂直平分线. 过点 D 作 $DP/\!/BC$，交 CM 于点 P，连接 AP，EP，$\therefore PA=PD$，$\therefore \angle DPM=\angle APM$. $\because DP/\!/BC$，$\therefore \angle MDP=\angle B$. $\because \angle PMD=\angle DEB$，$\therefore \triangle PDM\backsim\triangle DBE$，

$\therefore \frac{PD}{DB}=\frac{DM}{BE}$，即 $\frac{PD}{5}=\frac{\frac{16}{5}}{3}$，$\therefore PD=\frac{16}{3}$.

过点 P 作 $PN\perp BC$ 于点 N，则四边形 $DENP$ 是矩形，$\therefore EN=DP=\frac{16}{3}$，$PN=DE=4$. $\because EC=\frac{32}{3}$，$\therefore EN=\frac{1}{2}EC$，$\therefore$ 点 N 是 EC 的中点，$\therefore PN$ 垂直平分 EC，$\therefore PE=PC$，$\therefore \angle EPN=\angle CPN=\frac{1}{2}\angle EPC$. $\because \frac{PN}{EN}=\frac{4}{\frac{16}{3}}=\frac{3}{4}$，$\frac{DM}{PM}=\frac{BE}{DE}=\frac{3}{4}$，$\therefore \frac{PN}{EN}=\frac{DM}{PM}$. 又$\because \angle PNE=\angle DMP=90^\circ$，$\therefore \triangle PEN\backsim\triangle DPM$，$\therefore \angle EPN=\angle PDM$. $\because \angle MPD+\angle PDM=180^\circ-\angle PMD=90^\circ$，$\therefore \angle MPD+\angle EPN=90^\circ$，即 $\frac{1}{2}\angle APD+\frac{1}{2}\angle EPC=90^\circ$，$\therefore \angle APD+\angle EPC=180^\circ$，$\therefore$ 当点 G 与点 P 重合时，满足 $\angle AGD+\angle CGE=180^\circ$.